

# ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ, РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ

## ОБОБЩЕННАЯ ПРОЕКТИВНАЯ МОРФОЛОГИЯ

Ю.В. Визильтер<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФГУП Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем, Москва, Россия

### Аннотация

Дано формальное описание обобщенной проективной морфологии. Рассмотрены алгебраические основы обобщенной проективной морфологии. Описаны формальная и критериальная схемы построения проективных операторов. Сформулирован ряд достаточных условий проективности для операторов на базе критериев. Определены и исследованы проекторы минимального расстояния (максимального сходства), проекторы максимальной (минимальной) нормы проекции, проекторы на базе критериев-предикатов, проекторы на базе признаковых описаний и параметрических моделей, проекторы, реализуемые методом динамического программирования. Описан класс проективных критериальных морфологий на базе операторов структурной интерполяции.

Ключевые слова: математическая морфология, анализ изображений.

### Введение

В статье [1] была предложена так называемая *проективная морфология разложений* (ПМР) на базе структурных моделей с однородными связями. Было показано, что рассматриваемые в рамках ПМР однородные структуры всегда могут быть однозначно охарактеризованы массивами или векторами признаков, которые в семантическом плане можно рассматривать как содержательные структурные описания соответствующих объектов. При этом в пространстве морфологических признаков стандартным образом определяются удобные нормированные коэффициенты морфологической корреляции, позволяющие оценивать степень сходства образов с точностью до некоторых классов эквивалентности, которые, в свою очередь, соответствуют определенным семантическим таксонам предметной области («фигуры одной формы», «модели одного класса» и т.п.). Предложенный формализм «проективной морфологии изображений» позволяет с единых позиций описывать и разрабатывать такие базовые аспекты машинного зрения, как структурная фильтрация, сегментация и сжатие изображений, построение структурных спектров, структурное сравнение изображений и моделей, классификация образов, обнаружение и локализация объектов на изображениях.

В данной статье будет предложено обобщенное описание морфологических операторов, задаваемых не только на базе *структурных элементов (функций)*, но также на базе *структурирующих параметров и структурирующих критериев (функционалов)*. При этом, отказавшись от обязательного выделения на изображении структурирующих элементов (структурирующих функций), опираясь лишь на идею построения оптимальных в некотором смысле проективных операторов, мы теряем ряд важных свойств и алгоритмических схем ПМР, но тем не менее сохраняем возможность вычисления морфо-

логических коэффициентов корреляции, а также параметрических спектров и существенно расширяем при этом область применимости проективного анализа. Такую форму морфологии, основанную не на выделении структурных элементов, а на вычислении структурирующих функционалов, описывающих критерии проектирования, можно считать наиболее общей формой проективной морфологии, а предлагаемый подход можно назвать *обобщенной проективной морфологией (ОПМ)*.

В статье дается формальное описание обобщенной проективной морфологии, приводится краткая сводка ее свойств и способов ее применения в задачах анализа изображений, а также исследуются различные конструктивные схемы построения соответствующих проективных операторов.

### 1. Алгебраические основы обобщенной проективной морфологии

Пусть имеется множество *образов*  $\Omega$ , на котором определена операция *сложения* ('+'), задающая на  $\Omega$  группу с «нулевым образом»  $\emptyset$ . Соответственно определена и обратная операция *вычитания*, или взятия *разности* ('-'). Кроме этого, на множестве скаляров образов определена  $\Omega - \text{норма}$   $\mu: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , обозначаемая также  $\mu(A) = \|A\|$ , причем норма разности двух образов обладает свойствами *расстояния*:

$$\begin{aligned} \forall A, B, C \in \Omega: \|A-B\| \geq 0, \|A-A\| = 0, \\ \|A-B\| + \|B-C\| \geq \|A-C\|. \end{aligned} \quad (1)$$

Введем на  $\Omega$  *оператор проекции*, обладающий следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \forall A \in \Omega: \text{Pr}(A) \in \Omega, \text{Pr}(\emptyset) = \emptyset, \\ \text{Pr}(A) = \text{Pr}(\text{Pr}(A)). \end{aligned} \quad (2)$$

В дальнейшем обозначение оператора проекции символом 'Pr' будет использоваться нами в универсальном ключе безотносительно к природе проектируемых элементов наравне с универсальными сим-

волами операций '+', '-' и т.п. Алгебраическую систему  $\{\Omega, '+', \mu, \text{Pr}\}$  будем называть *обобщенной проективной морфологией* на  $\Omega$  на базе проектора  $\text{Pr}$ .

Множество *собственных* (стабильных) элементов проектора

$$\mathbf{M} = \{A \in \Omega: \text{Pr}(A) = A\} \quad (3)$$

называется *модельным множеством* или *моделью*. Поскольку в силу свойств (1) и определения (2) оператор проекции  $\text{Pr}$  любому образу из  $\Omega$  ставит в соответствие элемент из  $\mathbf{M}$ , проектор имеет смысл *проектирования образа на модель*:

$$\text{Pr}(A) = \text{Pr}(A, \mathbf{M}). \quad (4)$$

Для сравнения образа с моделью, заданной в неявном виде при помощи оператора проекции, определим *морфологический коэффициент корреляции изображения с моделью*

$$K_M(A, \mathbf{M}) = \exp(-\|A - \text{Pr}(A, \mathbf{M})\| / \|\text{Pr}(A, \mathbf{M})\|) \quad (5)$$

со следующими стандартными свойствами

1.  $\forall A \in \Omega: K_M(A, \mathbf{M}) \leq 1$ ;
2.  $K_M(A, \mathbf{M}) = 1 \Leftrightarrow A \in \mathbf{M}$ ;
3.  $\text{Pr}(A, \mathbf{M}) = \emptyset \Leftrightarrow K_M(A, \mathbf{M}) = 0$ .

Заметим, что форма выражения (5) отличается от формы использовавшихся ранее выражений для морфологического коэффициента корреляции на базе разложений, основанном на отношении нормы проекции к норме исходного изображения, поскольку в общем случае равенство нормы проекции норме исходного изображения не гарантирует их совпадения, а, следовательно, единичное значение коэффициента корреляции теряет информативность.

Можно также определить морфологический коэффициент корреляции изображений

$$KM(A, B, \mathbf{M}) = \frac{1 - \|\text{Pr}(A, \mathbf{M}) - \text{Pr}(B, \mathbf{M})\|}{\max(\|A\|, \|B\|)}, \quad (6)$$

$A, B \in \Omega$ . Этот коэффициент позволяет установить *морфологическую эквивалентность* образов, проекции которых совпадают.

Морфологический подход позволяет также сравнивать между собой модели. Пусть имеются две модели  $\mathbf{M1}$  и  $\mathbf{M2}$ , для которых справедливо следующее соотношение

$$\mathbf{M1} \supseteq \mathbf{M2}. \quad (7)$$

Тогда модель  $\mathbf{M1}$  по отношению к  $\mathbf{M2}$  является *более общей*, а  $\mathbf{M2}$  по отношению к  $\mathbf{M1}$  - соответственно *менее общей*. То же самое отношение можно трактовать и как *относительную морфологическую сложность* моделей. В самом деле, пусть модель задается в виде некоторого набора условий, накладываемых на образ. Чем больше будет таких условий, тем соответственно сложнее модель, и тем меньшее число образов могут ей удовлетворять. То есть, чем *сложнее* модель, тем *менее общей* она является, и наоборот - чем модель *проще*, тем более общей ее можно считать. В терминах морфологических коэффициентов корреляции (5) условие (7) имеет вид

$$\forall A \in \mathbf{M2}: K_M(A, \mathbf{M1}) = 1; \exists B \in \mathbf{M1}: K_M(B, \mathbf{M2}) < 1. \quad (8)$$

Морфологический коэффициент корреляции может использоваться для решения задач распознавания (классификации) образов, а также обнаружения на изображениях объектов, заданных проективными моделями (в том числе - взаимной привязки фрагментов изображений).

Пусть дано  $T$  моделей  $\{\mathbf{M1}, \mathbf{M2}, \dots, \mathbf{M}_T\}$ , описывающих соответственно  $T$  классов образов. Оператор *морфологической классификации*, или *морфологического распознавания* определяет принадлежность образа  $A$  модели (классу) по признаку максимального значения морфологического коэффициента корреляции (5):

$$\text{Class}(A) = i: \forall j \neq i, K_M(A, \mathbf{M}_i) \geq K_M(A, \mathbf{M}_j). \quad (9)$$

Для того, чтобы перейти от задачи распознавания к задаче обнаружения (локализации) объектов, необходимо формализовать геометрическую природу образов. Пусть на  $\Omega$  задана *группа преобразований*  $\mathcal{G}(\Omega)$ , имеющая смысл *геометрического преобразования* образов. Предположим теперь, что группа геометрических преобразований  $\mathcal{G}(\Omega)$  является *параметрической*

$$\begin{aligned} G(P) &= \{g(\mathbf{p}) \mid G; \mathbf{p} \in G\}, \\ \forall \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in P \subseteq \mathbb{R}^N, A \in \Omega: \\ g(\mathbf{p}_1)(g(\mathbf{p}_2)(A)) &= g(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)(A), \\ g(\mathbf{0})(A) &= A, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\mathbf{p}$  - вектор *параметров локализации*;  $(-\mathbf{p})$  - вектор *параметров обратного преобразования*;  $P$  - *пространство параметров локализации образов*;  $N$  - *размерность пространства  $P$* ;  $g(\mathbf{0})$  - *тождественное преобразование*. Таким образом, множество образов  $\Omega$  также оказывается *параметризованным*

$$\begin{aligned} \Omega(P) &= \{A(\mathbf{p}) = g(\mathbf{p})(A): A \in \Omega, \\ g(\mathbf{p}) \in \mathcal{G}; \mathbf{p} \in P \subseteq \mathbb{R}^N\}. \end{aligned} \quad (11)$$

В таком случае задача определения параметров локализации объекта, заданного моделью  $\mathbf{M}$ , на изображении  $A$  может решаться путем поиска значимых (близких к 1) локальных максимумов *морфологического корреляционного поля*:

$$K_M(\mathbf{p}) = K_M(A(-\mathbf{p}), \mathbf{M}). \quad (12)$$

Заметим, что в данном случае параметры локализации (смещение, поворот, масштаб и т.п.) искомого объекта определяются путем обратного геометрического преобразования анализируемого образа.

Введем также еще одно полезное понятие - *морфологический спектр*. Пусть оператор проекции  $\text{Pr}$  зависит от  $k$  свободных параметров:  $\text{Pr}(A, \mathbf{q})$ , где  $\mathbf{q} \in \Theta \subseteq \Psi^k$  - *вектор параметров проектирования*;  $\Theta$  - *пространство параметров проектирования*;  $\Psi \in \mathbb{R}$  - *множество значений, которые могут принимать параметры проектирования*. Тогда *параметрический морфологический спектр* можно определить как

$$Sp(A, \mathbf{q}) = \|\text{Pr}(A, \mathbf{q})\|: \Theta \rightarrow \mathbb{R}^+. \quad (13)$$

Далее, частичные морфологические спектры могут быть рассмотрены как опытные статистики специального вида, описывающие наблюдаемое полного спектра (13) по одному или нескольким параметрам вектора  $\mathbf{q} \in \Theta$ . Пусть вектор параметров разложения  $\mathbf{q} \in \Theta$  состоит из двух частей:

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2). \quad (14)$$

Интегральным спектром (распределением моментов) порядка  $n$  образа  $A$  по характеристикам из  $\{\mathbf{q}_1 \in \Theta\}$  будем называть выражение следующего вида

$$Sp(A, \mathbf{q}_1) = [\sum_{\mathbf{q}_2 \in \Theta} Sp(A, \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle)^n]^{1/n}. \quad (15)$$

В основном на практике используются массовые спектры, или проекции ( $n=1$ ), энергетические спектры ( $n=2$ ) и максимальные спектры ( $n=\infty$ ). Можно также определить дифференциальные спектры. Пусть  $q$  – скаляр (один параметр из  $\mathbf{q}$ ). Тогда дифференциальный спектр по  $q$  вычисляется на основе интегрального спектра (15) как его производная:

$$DSp(A(\mathbf{p}), q) = d(Sp(A, q))/dq, \quad (16)$$

где  $d(Sp(A(\mathbf{p}), q))$  – приращение интегрального спектра  $Sp(A(\mathbf{p}), q)$ , соответствующее минимальному приращению  $dq$  параметра  $q$ .

Таким образом, несмотря на то, что обобщенная проективная модель является существенно менее содержательной по сравнению со структурной проективной моделью, используемой в проективных морфологических разложениях [1], обобщенная проективная морфология также предоставляет достаточно полный набор средств для распознавания образов и анализа изображений.

Рассмотрим теперь возможные схемы построения проективных операторов анализа образов, обладающих необходимыми математическими и семантическими свойствами.

## 2. Формальная схема построения проективных операторов. Модульные и унитарные морфологии

В наиболее общем виде математический аппарат анализа образов, опирающийся на проективные операторы, можно найти, например, в работах М. Павель [2], где используется формализм теории категорий. Для целей данного исследования этот аппарат является избыточным, поэтому мы ограничимся стандартным алгебраическим описанием. Однако заметим, что используемые здесь и далее термины «морфологии» и «морфологический», восходящие, естественно, к морфологическим теориям Серра [3] и Пытьева [4], сохраняют свой смысл и применительно к теории форм (Shape Theory), описанной Павель.

Определим оператор прямого отображения (forward mapping), отображающий образ из  $\Omega$  на множество вторичных образов  $\Lambda$ :

$$\varepsilon: \Omega \rightarrow \Lambda. \quad (17)$$

Сопряженный с ним оператор обратного отображения (backward mapping) может быть определен

как оператор обратного отображения из пространства вторичных образов в пространство исходных образов

$$\delta: \Lambda \rightarrow \Omega. \quad (18)$$

Такой, что модульный морфологический фильтр

$$\psi(A) = \delta(\varepsilon(A)): \Omega \rightarrow \Omega \quad (19)$$

обладает свойствами морфологического проектора:

$$\psi(\psi(A)) = \psi(A). \quad (20)$$

Алгебраическая система  $\{\Omega, \Lambda, \varepsilon, \delta, \psi\}$ , для которой справедливы выражения (17-20), называется модульной проективной морфологией на базе  $\{\varepsilon, \delta\}$ . Приняв данную модульную схему, можно сразу же сформулировать естественное условие, связывающее сопряженные операторы.

**Утверждение 1.** Для любой пары операторов  $\{\varepsilon, \delta\}$ , для которых справедливы выражения (17-20), условие

$$\forall A \in \Omega: \varepsilon(\psi(A)) = \varepsilon(A) \quad (21)$$

является необходимым и достаточным условием того, что данная пара операторов определяет модульную проективную морфологию.

**Доказательство.** Эквивалентность выражений (20) и (21) доказывается непосредственно путем применения оператора  $\delta$  к обеим частям выражения (21):

$$\delta(\varepsilon(\psi(A))) = \delta(\varepsilon(A)) \Leftrightarrow \psi(\psi(A)) = \psi(A). \blacklozenge$$

Введем теперь понятия «грубого» и «негрубого» преобразования. Для любого заданного морфологического проектора  $\psi$  грубым будем называть такое преобразование  $\gamma$ , что

$$\exists A: \psi(\gamma(\psi(A))) \neq \psi(A). \quad (22)$$

Соответственно негрубым будет называться такое преобразование  $\gamma$ , для которого при любых  $A$  справедливо условие

$$\psi(\gamma(\psi(A))) = \psi(A). \quad (23)$$

Иными словами, негрубое преобразование вносит в изображение такие изменения, которые являются нечувствительными для данного оператора проекции. Пусть теперь оператор проекции является модульным. Введем обозначения

$$\delta_\gamma(B) = \gamma(\delta(B)), \quad (24)$$

$$\psi_\gamma(A) = \gamma(\psi(A)) = \gamma(\delta(\varepsilon(A))) = \delta_\gamma(\varepsilon(A)). \quad (25)$$

Как следует из (23) и (21), если оператор  $\gamma$  является негрубым относительно  $\psi$  и пара операторов  $\{\varepsilon, \delta\}$  определяет модульную морфологию, то пара операторов  $\{\varepsilon, \delta_\gamma\}$ , для которых справедливы выражения (17-18), также будет определять модульную морфологию. Модульные морфологии  $\{\varepsilon, \delta\}$  и  $\{\varepsilon, \delta_\gamma\}$  будем называть альтернативными модульными морфологиями на базе оператора  $\varepsilon$ .

Модульные морфологические схемы могут включать более двух этапов. Определим последовательность множеств  $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$  и соответствующие последовательности операций:

$$\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}: \varepsilon_1: \Omega \rightarrow \Lambda_1, \varepsilon_2: \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2, \dots, \varepsilon_n: \Lambda_{n-1} \rightarrow \Lambda_n; \quad (26)$$

$$\{\delta_1, \dots, \delta_n\}: \delta_1: \Lambda_1 \rightarrow \Omega, \delta_2: \Lambda_2 \rightarrow \Lambda_1, \dots, \delta_n: \Lambda_n \rightarrow \Lambda_{n-1}; \quad (27)$$

$$\{\psi_1, \dots, \psi_n\}: \forall A \in \Omega: \psi_1(A) = \delta_1(\varepsilon_1(A)),$$

$$\psi_2(A) = \delta_1(\delta_2(\varepsilon_2(\varepsilon_1(A)))) , \dots ,$$

$$\psi_n(A) = \delta_1(\dots \delta_n(\varepsilon_n(\dots \varepsilon_1(A) \dots)) \dots). \quad (28)$$

Если все операторы в последовательности (28) являются проекторами, такую схему можно назвать *n-уровневой иерархической модульной схемой* проективного морфологического анализа.

В важном частном случае, когда

$$\Lambda \subseteq \Omega, \delta(A) = A, \psi(A) = \delta(\varepsilon(A)) = \varepsilon(A), \quad (29)$$

модульная морфологическая схема превращается в *унитарную*, основанную на единственном операторе – *унитарном проекторе*  $\psi$ . В унитарной морфологической схеме  $\{\Omega, \Lambda, \psi\}$  легко узнать базовые элементы описанной в предыдущем подразделе обобщенной проективной морфологии  $\{\Omega, \mathbf{M}, \text{Pr}\}$ , где  $\mathbf{M} = \Lambda$  – модельное множество изображений,  $\text{Pr} = \psi$  – оператор проекции на модельное множество.

### 3. Схема построения морфологических операторов на основе целевых критериев

В предыдущем подразделе мы рассмотрели формальную схему построения проективной морфологии, в которой проективные свойства конструируемых фильтров обеспечиваются непосредственно алгебраическими свойствами базовых операторов. Такие морфологии можно назвать *формальными*, поскольку они никак в явном виде не учитывают специфику решаемой задачи анализа данных.

Другой подход к построению морфологических операторов основан на использовании некоторых априорных критериев, основанных на семантике анализируемой предметной области, оптимальному значению которых должны соответствовать результаты обработки наблюдаемых данных. Пусть задана целевая функция-критерий

$$\Phi(A, B): \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}, \quad (30)$$

которую без потери общности можно считать *функцией штрафа* в том смысле, что задача построения *критериального морфологического фильтра* подразумевает ее минимизацию:

$$\psi(A, \Phi) = B: \Phi(A, B) \rightarrow \min(B \in \Omega). \quad (31)$$

При этом хорошо определенным критерием является такой, что

$$\forall A \in \Omega \exists B \in \Omega:$$

$$\forall C \in \Omega, C \neq B \Rightarrow \Phi(A, B) < \Phi(A, C), \quad (32)$$

то есть критерий  $\Phi$  однозначно определяет морфологический фильтр  $\psi(A, \Phi)$ , и тогда можно говорить, в отличие от описанной выше *формальной морфологии* на базе  $\{\Omega, \Lambda, \varepsilon, \delta\}$ , о *критериальной морфологии* на базе  $\{\Omega, \Lambda, \Phi\}$ .

Преимущество данного подхода заключается в том, что при конструировании критерия оптимизации требуемые семантические свойства морфологического оператора могут быть сформулированы в

явной форме, что предопределяет желаемое поведение получаемых морфологических фильтров, спектров и коэффициентов корреляции. Однако здесь мы, в свою очередь, сталкиваемся с двумя принципиальными вопросами:

1) Является ли оператор, получаемый в результате процедуры оптимизации данного критерия, проектором?

2) Существует ли эффективная в вычислительном смысле процедура вычисления данного проектора?

Дальнейшие разделы данной статьи посвящены рассмотрению этих вопросов для различных типов критериев, используемых в практически значимых задачах.

В случае, если критериальный морфологический фильтр  $\psi(A, \Phi)$  удовлетворяет условию проективности (20), он может быть назван *критериальным морфологическим проектором*, а соответствующая критериальная морфология на базе  $\{\Omega, \Lambda, \Phi\}$  становится (с учетом введенных в первом разделе определений) *обобщенной проективной морфологией на базе критерия  $\Phi$* .

Определим еще несколько полезных понятий. *Областью допустимых значений (ОДЗ)* критерия  $\Phi$  при проектировании исходного образа  $A$  является

$$\mathbf{V}(A, \Phi) = \{ B \in \Omega: \Phi(A, B) < +\infty \}. \quad (33)$$

Соответственно *необходимое условие проективности* для оператора на базе критерия (31) имеет вид

$$\forall A \in \Omega: B \in \mathbf{V}(A, \Phi) \Rightarrow B \in \mathbf{V}(B, \Phi), \quad (34)$$

иначе при повторном применении оператора его значение не сможет остаться прежним.

Определим также условие монотонности ОДЗ (35):

$$\forall A \in \Omega, \forall B \in \mathbf{V}(A, \Phi):$$

$$\mathbf{V}(B, \Phi) \subseteq \mathbf{V}(A, \Phi). \quad (35)$$

Критерии, для которых выполняется условие (35), будем называть *монотонными по ОДЗ* или просто *монотонными*. Это условие не является необходимым, но во многих случаях позволяет определить достаточные условия проективности для операторов на базе хорошо определенных критериев.

Определим теперь в качестве *стандартного вида* критерия проектирования следующий *выпуклый критерий штрафа*

$$\Phi(A, B) = J(A, B) + \chi(A, B) + \alpha \times Q(B), \quad (36)$$

где  $J(A, B)$  – *критерий соответствия* проекции и проектируемого образа (*matching function*), обладающий следующим естественным свойством

$$\forall A \in \Omega, B \in \mathbf{V}(A, \Phi): J(A, A) \leq J(A, B), \quad (37)$$

$\chi(A, B)$  – *критерий (предикат) допустимости* решения (*validation function*) вида

$$\chi(A, B) = \{ \begin{array}{l} 0: B \in \mathbf{V}(A, \Phi); \\ +\infty: B \notin \mathbf{V}(A, \Phi) \end{array} \}, \quad (38)$$

определяющий в явном виде область допустимых значений;  $Q(B)$  – критерий качества проекции (projection quality function), характеризующий ее принадлежность модели  $M$ ;  $\alpha \geq 0$  – структурирующий параметр, обеспечивающий компромисс между критериями соответствия и качества. Соответствующий морфологический проектор будем называть проектором на базе структурирующих критериев и параметров

$$\begin{aligned} \psi(A, \Phi) &= \text{Pr}(A, J, \chi, \alpha, Q) = \\ &= B: \Phi(A, B, J, \chi, \alpha, Q) \rightarrow \min(B). \end{aligned} \quad (39)$$

В случае, когда  $\chi(A, B) \equiv 0$  (ОДЗ неограничена), критерий (36) принимает упрощенный вид

$$\Phi(A, B) = J(A, B) + \alpha \times Q(B). \quad (40)$$

Выбор критерия типа (36) в качестве стандартного при рассмотрении способов построения проективных операторов связан с тем, во-первых, он включает в явном виде три основных вида семантических требований, налагаемых на практике на процедуры фильтрации и сегментации данных, а во-вторых, вид критерия (36) с учетом (37) позволяет утверждать, что такой критерий является хорошо определенным, если в окрестности проекции требования соответствия и качества оказываются противоположными:

$$\begin{aligned} \forall A \in \Omega, B \in V(A, \Phi), \Phi(A, B) < \Phi(A, A) \Rightarrow \\ \Rightarrow J(A, B) \geq J(A, A), Q(B) < Q(A), \end{aligned} \quad (41)$$

то есть меньшее соответствие данным может компенсировать лучшее качество фильтрации, и наоборот. Уровень равновесия между этими требованиями устанавливает параметр  $\alpha$ , обладающий следующим важным свойством.

**Утверждение 2.** С увеличением значения структурирующего параметра  $\alpha$  в выражении (36) относительная сложность модели (7), которую определяет проектор (39), также монотонно возрастает.

Доказательство. Обозначим

$$M(\alpha) = \{B \in \Omega: B = \text{Pr}(B, J, \chi, \alpha, Q)\}.$$

Соответственно требуется доказать, что

$$\{\alpha \geq \beta \Rightarrow M(\alpha) \subseteq M(\beta)\}$$

или, что то же самое,

$$\{B = \text{Pr}(B, J, \chi, \alpha, Q), \alpha \geq \beta \Rightarrow B = \text{Pr}(B, J, \chi, \beta, Q)\}.$$

Предположим, это не так, то есть

$$\exists B, C \in V(B, \Phi):$$

$$B = \text{Pr}(B, J, \chi, \alpha, Q), C = \text{Pr}(B, J, \chi, \beta, Q) \neq B.$$

Отсюда

$$\{\Phi(B, B, \alpha) < \Phi(B, C, \alpha), \Phi(B, B, \beta) > \Phi(B, C, \beta)\}.$$

Раскроем выражения

$$\{J(B, B) + \alpha \times Q(B) < J(B, C) + \alpha \times Q(C),$$

$$J(B, B) + \beta \times Q(B) > J(B, C) + \beta \times Q(C)\},$$

перегруппируем

$$\{J(B, B) - J(B, C) < \alpha \times Q(C) - \alpha \times Q(B),$$

$$J(B, B) - J(B, C) > \beta \times Q(C) - \beta \times Q(B)\},$$

откуда

$$\{\beta \times [Q(C) - Q(B)] < \alpha \times [Q(C) - Q(B)],$$

$$J(B, B) - J(B, C) > \beta \times [Q(C) - Q(B)]\}.$$

Из последнего неравенства имеем

$$\begin{aligned} \{\beta \times [Q(C) - Q(B)] < J(B, B) - J(B, C) \leq 0, \beta \geq 0\} \Rightarrow \\ \Rightarrow Q(C) - Q(B) < 0, \end{aligned}$$

после чего из первого неравенства получаем

$$\begin{aligned} \{\beta \times [Q(C) - Q(B)] < \alpha \times [Q(C) - Q(B)], Q(C) - Q(B) < 0\} \\ \Rightarrow \alpha < \beta, \end{aligned}$$

что противоречит исходному предположению. ♦

Таким образом, структурирующий параметр  $\alpha$  также можно назвать параметром морфологической сложности модели. Более того, можно также говорить и об относительной морфологической сложности конкретного образа  $A$ , численной характеристикой которого является соответствующий дифференциальный морфологический спектр

$$Sp(A, \alpha) = d \|\text{Pr}(A, J, \chi, \alpha, Q)\| / d\alpha. \quad (42)$$

При этом для любого конкретного образа  $A$  однозначно определяется коэффициент максимальной морфологической сложности по отношению к  $\{J, \chi, Q\}$ :

$$\alpha_{\max}(A) = \max\{\alpha \geq 0: A = \text{Pr}(A, J, \chi, \alpha, Q)\}. \quad (43)$$

Рассмотрим теперь различные способы и соответствующие достаточные условия построения проективных операторов на базе критериев типа (36).

#### 4. Проекторы минимального расстояния (максимального схождения)

Пусть критерий соответствия  $J(A, B)$  обладает свойствами расстояния:

$$\forall A, B, C \in \Omega: J(A, B) \geq 0, J(A, A) = 0,$$

$$J(A, B) = J(B, A), J(A, B) + J(B, C) \geq J(A, C). \quad (44)$$

Поскольку объемлющий критерий  $\Phi$  является штрафным и его требуется минимизировать, критерий соответствия, удовлетворяющий условию (44), будем называть критерием минимального расстояния. Пусть, кроме того, критерий  $\Phi(A, B)$  (39) является монотонным в смысле условия (35). Тогда можно доказать следующее утверждение.

**Утверждение 3.** Монотонные критерии минимального расстояния (31, 34, 38) определяют морфологический проектор (39).

**Доказательство.** Необходимо доказать, что при повторном применении оператора (40), построенного на базе критерия указанного вида, результат более не будет изменяться. Предположим, оператор  $\psi$ , определяемый выражением (39), не является проектором, то есть если при первичном его применении к некоторому образу  $A$  оптимальным в смысле критерия  $\Phi$  оказался некоторый образ  $B$ , то при повторном применении его к образу  $B$  оптимальным может оказаться некоторый иной образ  $C$ :

$$\exists A \in \Omega: B = \psi(A, \Phi), \Phi(A, B) \rightarrow \min(B \in V(A, \Phi)),$$

$$C = \psi(B, \Phi) \neq B, \Phi(B, C) \rightarrow \min(C \in \mathbf{V}(B, \Phi) \subseteq \mathbf{V}(A, \Phi)).$$

Значит, с одной стороны,  $\Phi(A, B) \leq \Phi(A, C)$ , а с другой стороны,  $\Phi(B, B) > \Phi(B, C)$ . Подставим соответствующие выражения для  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} \Phi(A, B) \leq \Phi(A, C) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow J(A, B) + \alpha \times Q(B) &\leq J(A, C) + \alpha \times Q(C); \\ \Phi(B, B) > \Phi(B, C) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow J(B, B) + \alpha \times Q(B) &> J(B, C) + \alpha \times Q(C). \end{aligned}$$

С учетом свойств  $J$ , второе выражение преобразуется к виду

$$\alpha \times Q(B) > J(B, C) + \alpha \times Q(C).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} J(A, B) - J(A, C) &\leq \alpha \times Q(C) - \alpha \times Q(B), \\ J(B, C) &< \alpha \times Q(B) - \alpha \times Q(C). \end{aligned}$$

Умножив левую и правую части последнего выражения на  $-1$ , получим

$$-J(B, C) > \alpha \times Q(C) - \alpha \times Q(B).$$

Объединяя два выражения, последовательно получим

$$\begin{aligned} J(A, B) - J(A, C) &\leq \alpha \times Q(C) - \alpha \times Q(B) < -J(B, C), \\ J(A, B) - J(A, C) &< -J(B, C), \\ J(A, B) + J(B, C) &< J(A, C), \end{aligned}$$

что противоречит утверждению о том, что  $\psi$  – проектор минимального расстояния (44), поскольку согласно «правилу треугольника»

$$J(A, B) + J(B, C) \geq J(A, C).$$

Таким образом, при повторном применении оператора  $\psi$  оптимальный образ не может оказаться иным, что и требовалось доказать:  $\psi = \psi^2$ . ♦

Важным частным случаем критерия минимального расстояния является *критерий минимума нормы разности*

$$J(A, B) = \|A - B\| \rightarrow \min(B). \quad (45)$$

Легко показать связь данного критерия с *критерием максимального сходства* в смысле максимума коэффициента морфологической корреляции (5)

$$\begin{aligned} K_M(A, \Phi) = \exp(-\|A - B\|/\|B\|) &\rightarrow \max(B \in \mathbf{V}(A, \Phi)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \{\|A - B\| \rightarrow \min(B), \|B\| \rightarrow \max(B)\}. &\quad (46) \end{aligned}$$

Таким образом, зафиксировав вид критерия соответствия (45), мы получаем *проектор минимальной нормы разности* (максимального сходства)  $\text{Pr}(A, \alpha, Q)$ , определяющий морфологию на базе *параметра сложности*  $\alpha$  и *структурирующего функционала качества*  $Q$ .

### 5. Проекторы максимума обобщенной нормы проекции

Как видно из выражения (48), критерий максимума коэффициента морфологической корреляции (5) включает не только требование максимальной близости образа и его проекции, но также требование максимальной нормы самой проекции. Исследуем это требование отдельно.

Рассмотрим критерий вида

$$\Phi(A, B) = J(B) + \chi(A, B) + \alpha \times Q(B), \quad (47)$$

отличающийся от критерия (36) тем, что критерий  $J(B)$  не зависит от  $A$ . Казалось бы, такой критерий уже нельзя называть критерием соответствия, поскольку он более не описывает связь между проектируемым образом и проекцией. Однако с формальной точки зрения важно лишь то, чтобы соблюдалось условие (37), принимающее в данном случае вид

$$\forall A \in \Omega, B \in \mathbf{V}(A, \Phi): J(A) \leq J(B). \quad (48)$$

*Пример.* Рассмотрим критериальное описание морфологического открытия Серра [3]. Пусть критерий (предикат) качества  $Q(B) \in \{0, +\infty\}$  описывает допустимую форму проекции как множество образов, получаемых объединением структурирующих элементов заданной формы. Тогда согласованный критерий соответствия можно записать следующим образом:

$$J(B) = -\|B\|, \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \chi(A, B) = \{0: B \subseteq A; +\infty: B \not\subseteq A\} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \forall B \in \mathbf{V}(A, \Phi): J(A) \leq J(B). & \end{aligned}$$

При этом  $\chi(A, B)$  накладывает ограничения на множество возможных решений *в зависимости от проектируемого образа*, а  $J(B)$  делает предпочтительными решения, находящиеся вблизи границы множества возможных решений, то есть вблизи проектируемого образа. Таким образом, комплексный критерий  $\{J(B) + \chi(A, B)\} \rightarrow \min(B)$  действительно описывает связь проекции с исходным образом, причем критерий  $J(B)$  является необходимой частью этого описания.

Аналогичным образом для морфологического закрытия Серра

$$J(B) = \|B\|, \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \chi(A, B) = \{0: A \subseteq B; +\infty: A \not\subseteq B\} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \forall B \in \mathbf{V}(A, \Phi): J(A) \leq J(B). & \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Описанные в данном примере критерии соответствия естественно назвать критериями *экстремума нормы проекции*. В расширенном смысле будем называть критериями *максимума обобщенной нормы проекции* все критерии, которые можно записать в виде (40, 41).

Легко заметить, что в случае  $\chi(A, B) \equiv 0$  критерий (47) оказывается вообще не зависящим от  $A$  и, следовательно, теряет всякий смысл. Значит, для того, чтобы комплексный критерий  $J(B) + \chi(A, B)$  эффективно работал, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\begin{aligned} \forall A \exists B: \chi(A, B) = +\infty &\Leftrightarrow \forall A \in \Omega, \forall B \in \mathbf{V}(A, \Phi): \\ \mathbf{V}(B, \Phi) \subset \mathbf{V}(A, \Phi). &\quad (51) \end{aligned}$$

Условие (51) является более сильным вариантом условия монотонности (35) и может быть названо условием *уменьшающей монотонности ОДЗ*. Для проекторов, монотонно уменьшающих ОДЗ, можно доказать следующее утверждение.

**Утверждение 4.** Для критериев с монотонно уменьшающейся ОДЗ (51) требование максимума обобщенной нормы (40,41) определяет морфологический проектор (39).

**Доказательство.** Предположим, процедура  $\psi$  (39) не является проектором, то есть если при первом ее применении к некоторому образу  $A$  оптимальным в смысле критерия  $\Phi$  оказался некоторый образ  $B$ , то при повторном применении его к образу  $B$  оптимальным может оказаться некоторый иной образ  $C$ :

$$\begin{aligned} \exists A \in \Omega: B = \psi(A, \Phi), \Phi(A, B) \rightarrow \min(B \in \mathbf{V}(A, \Phi)), \\ C = \psi(B, \Phi) \neq B, \Phi(B, C) \rightarrow \min(C \in \mathbf{V}(B, \Phi)). \end{aligned}$$

В силу (47) в пределах  $\mathbf{V}(B, \Phi)$  значения критерия не зависят от проектируемого изображения:

$$\forall L \in \mathbf{V}(B, \Phi) \subset \mathbf{V}(A, \Phi): \Phi(B, L) = \Phi(A, L) = \Phi(L).$$

Значит,

$$\begin{aligned} \forall L \in \mathbf{V}(B, \Phi): L \neq B \Rightarrow \Phi(L) > \Phi(B), \\ \forall L \in \mathbf{V}(B, \Phi): L \neq C \Rightarrow \Phi(L) > \Phi(C). \end{aligned}$$

Однако в силу (51)

$$C \in \mathbf{V}(B, \Phi) \subset \mathbf{V}(A, \Phi) \Rightarrow C \in \mathbf{V}(A, \Phi),$$

то есть либо

$$\exists C \in \mathbf{V}(A, \Phi): C \neq B, \Phi(C) < \Phi(B),$$

и тогда  $B$  не может являться результатом первого применения оператора  $\psi$ , либо

$$\exists B \in \mathbf{V}(B, \Phi): C \neq B, \Phi(C) > \Phi(B),$$

и тогда  $C$  не может являться результатом его второго применения. Таким образом, исходное предположение является ложным, а значит, критерий  $\Phi$  (34,40,41) определяет морфологический проектор  $\text{Pr}(A, J, \chi, \alpha, Q)$ . ♦

В данном случае свободными параметрами проектора являются все *структурирующие характеристики* из набора  $\{J, \chi, \alpha, Q\}$ , правда, на  $J$  и  $\chi$  накладываются оговоренные выше ограничения, но в пределах этих ограничений критерии могут варьироваться.

Между рассмотренными в данном разделе проекторами максимума обобщенной нормы проекции и рассмотренными в предыдущем разделе проекторами минимума нормы разности проекции и исходного образа существует принципиальная связь, устанавливаемая следующим утверждением.

**Утверждение 5.** Собственное множество (модель) проектора минимума нормы разности (45) включает собственные множества (модели) проекторов на базе экстремума нормы проекции (42,43), если совпадают значения параметра  $\alpha$  и вид критерия  $Q$ .

**Доказательство.** Обозначим критерий минимума нормы разности, соответствующий проектор и соответствующую модель

$$\begin{aligned} \Phi(A, B, \Delta) = \|A - B\| + \alpha \times Q(B), \\ \text{Pr}(A, \Delta) = B: \Phi(A, B, \Delta) \rightarrow \min(B), \\ \mathbf{M}(\Delta) = \{B \in \Omega: \text{Pr}(B, \Delta) = B\}, \end{aligned}$$

а для критерия минимума нормы (50) соответственно

$$\begin{aligned} \Phi(A, B, \mu) = \|B\| + \alpha \times Q(B), \\ \text{Pr}(A, \mu) = B: \Phi(A, B, \mu) \rightarrow \min(B), \\ \mathbf{M}(\mu) = \{B \in \Omega: \text{Pr}(B, \mu) = B\}. \end{aligned}$$

Требуется доказать, что  $\mathbf{M}(\Delta)$  является *более общей* по сравнению с  $\mathbf{M}(\mu)$ :

$$\mathbf{M}(\mu) \subseteq \mathbf{M}(\Delta).$$

Допустим, это утверждение неверно, и следовательно

$$\exists B: \text{Pr}(B, \mu) = B, \text{Pr}(B, \Delta) = C \neq B.$$

Отсюда

$$\{\Phi(B, B, \mu) < \Phi(B, C, \mu), \Phi(B, B, \Delta) > \Phi(B, C, \Delta)\}.$$

Раскроем выражения для критериев

$$\begin{aligned} \{\|B\| + \alpha \times Q(B) < \|C\| + \alpha \times Q(C), \\ \|B - B\| + \alpha \times Q(B) > \|B - C\| + \alpha \times Q(C)\}, \end{aligned}$$

учтем  $\|B - B\| = 0$  и перегруппируем

$$\begin{aligned} \{\|C\| - \|B\| > \alpha \times Q(B) - \alpha \times Q(C), \\ \|B - C\| < \alpha \times Q(B) - \alpha \times Q(C)\}, \end{aligned}$$

откуда

$$\|B - C\| < \alpha \times Q(B) - \alpha \times Q(C) < \|C\| - \|B\|,$$

то есть

$$\{\|B - C\| < \|C\| - \|B\|\} \Leftrightarrow \{\|\emptyset - C\| > \|\emptyset - B\| + \|B - C\|\},$$

что противоречит неравенству треугольника (44). Значит, любой образ, полученный в результате применения проектора *минимума нормы разности*, при последующем применении к нему проектора *экстремума нормы проекции* с теми же параметрами *более не изменяется*, ч.т.д. Аналогичным образом это утверждение доказывается и для проектора максимума нормы проекции (49). ♦

#### 6. Квазимонотонные проекторы. Морфологии на базе структурной интерполяции

Назовем *эффективным подмножеством* области допустимых значений  $\mathbf{V}(A, \Phi)$  такое множество  $\mathbf{U}(A, \Phi) \subseteq \mathbf{V}(A, \Phi)$ , что

$$\begin{aligned} \forall B \in \mathbf{V}(A, \Phi), B \notin \mathbf{U}(A, \Phi): \\ \exists C \in \mathbf{U}(A, \Phi), \Phi(A, C) < \Phi(A, B). \end{aligned} \quad (52)$$

Понятие эффективного подмножества ОДЗ позволяет сформулировать следующее расширенное *условие квазимонотонности ОДЗ*:

$$\begin{aligned} \forall A \in \Omega, \forall B \in \mathbf{V}(A, \Phi): \\ \mathbf{U}(B, \Phi) \subseteq \mathbf{V}(A, \Phi). \end{aligned} \quad (53)$$

Критерии, для которых выполняется условие (53), будем называть *квазимонотонными по ОДЗ* или просто *квазимонотонными*.

**Утверждение 6.** Для критериев квазимонотонных по ОДЗ (45,46) требование максимума обобщенной нормы проекции (40,41) определяет морфологический проектор (39).

**Доказательство.** Предположим, процедура  $\psi$  (39) не является проектором, то есть если при первом ее применении к некоторому образу  $A$  оптимальным в смысле критерия  $\Phi$  оказался некоторый образ  $B$ , то

при повторном применении ее к образу В оптимальным может оказаться некоторый иной образ С:

$$\exists A \in \Omega: B = \psi(A, \Phi), \Phi(A, B) \rightarrow \min(B \in \mathbf{V}(A, \Phi)), \\ C = \psi(B, \Phi) \neq B, \Phi(B, C) \rightarrow \min(C \in \mathbf{V}(B, \Phi)).$$

В силу (47) в пределах  $\mathbf{V}(B, \Phi)$  значения критерия не зависят от проектируемого изображения:

$$\forall L \in \mathbf{V}(B, \Phi) \subset \mathbf{V}(A, \Phi): \Phi(B, L) = \Phi(A, L) = \Phi(L).$$

Значит,

$$\forall L \in \mathbf{V}(B, \Phi): L \neq B \Rightarrow \Phi(L) > \Phi(B),$$

$$\forall L \in \mathbf{V}(B, \Phi): L \neq C \Rightarrow \Phi(L) > \Phi(C).$$

Однако в силу (45,46)

$$C \in \mathbf{U}(B, \Phi) \subset \mathbf{V}(A, \Phi) \Rightarrow C \in \mathbf{V}(A, \Phi),$$

то есть либо

$$\exists C \in \mathbf{V}(A, \Phi): C \neq B, \Phi(C) < \Phi(B),$$

и тогда В не может являться результатом первого применения оператора  $\psi$ , либо

$$\exists B \in \mathbf{V}(B, \Phi): C \neq B, \Phi(C) > \Phi(B),$$

и тогда С не может являться результатом его второго применения. Таким образом, исходное предположение является ложным, а значит критерий  $\Phi$  (34,40,41) определяет морфологический проектор  $\text{Pr}(A, J, \chi, \alpha, Q)$ . ♦

*Пример.* Рассмотрим процедуру кусочно-линейной сегментации одномерной функции на базе линейной интерполяции. Любой одномерной функции  $f(x)$  эта процедура ставит в соответствие некоторую ломаную  $L(x)$ , значения которой совпадают с исходной функцией в  $n$  опорных (узловых) точках. Число опорных точек является переменным. При этом ОДЗ  $\mathbf{V}(f)$  представляет собой множество всех возможных ломаных, узлы которых принадлежат графику исходной функции  $f$ . Однако легко показать, что при повторной сегментации уже сегментированной функции  $L$  множество возможных решений  $\mathbf{V}(L) \subset \mathbf{V}(f)$ .

Рассмотрим рисунок 1. Функция  $L(x) \in \mathbf{V}(f)$  и опирается на  $n$  опорных точек функции  $f(x)$ :  $\{(x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\} \in \{f(x) \cap L(x)\}$ . На рисунке также показана функция  $g(x) \in \mathbf{V}(L)$ , опирающаяся на  $m=4$  опорных точек функции  $L(x)$ :  $\{(x'_1, L(x'_1)), \dots, (x'_m, L(x'_m))\} \in \{L(x) \cap g(x)\}$ . И поскольку не все точки ломаной  $L$  принадлежат графику исходной функции  $f$ , узлы функции  $g$  могут не принадлежать  $f$ , а значит  $g(x) \notin \mathbf{V}(f)$ .

Определим теперь критерий оптимальной кусочно-линейной сегментации функционалом

$$\Phi(f, L) = J(L) + \chi(f, L) + \alpha \times Q(L) \rightarrow \min(L),$$

где  $J(L)$  – отрицательная величина, равная по модулю длине графика функции  $L$ ; предикат  $\chi(f, L) \in \{0, +\infty\}$  описывает тот факт, что узлы ломаной  $L$  должны принадлежать графику функции  $f$ ;  $Q(L)$  – число опорных узловых точек ломаной  $L$ . Иными словами, процедура оптимальной сегментации состоит в отыскании такой ломаной, которая обеспечивает макси-

мальную длину графика при минимальном числе используемых опорных точек. Баланс этих двух критериев определяется параметром  $\alpha$ .

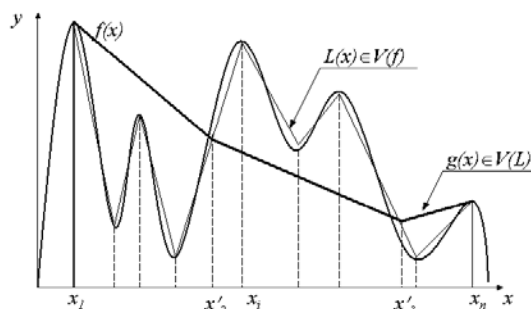


Рис.1. Пример повторной кусочно-линейной сегментации на базе интерполяции

Определим эффективное подмножество ОДЗ  $\mathbf{U}(L)$  для данного вида критерия. Во-первых, очевидно,

$$L \in \mathbf{U}(L),$$

поскольку длина любой ломаной  $g$ , узлы которой принадлежат  $L$ , не могут превышать длину  $L$ . По той же причине критерий  $J(B)$  является *итеративно-монотонным* в том смысле, что

$$\forall g \in \mathbf{V}(L): J(g) > J(L).$$

Значит,

$$\forall g \in \mathbf{V}(L): Q(g) > Q(L) \Rightarrow \Phi(g) > \Phi(L) \Rightarrow g \notin \mathbf{U}(L).$$

Пусть теперь  $Q(g) \leq Q(L)$ . Рассмотрим множество всех ломаных из  $\mathbf{V}(L)$ , опирающихся на  $m \leq n$  узловых точек. Поскольку график  $L$  – ломаная, все локальные экстремумы функции  $L(x)$  принадлежат множеству ее опорных точек. Значит, для любой ломаной, опирающейся на  $m$  точек, не все из которых являются узлами, легко определить ломаную большей длины, опирающуюся на такое же или меньшее число узловых точек: для этого нужно каждую узловую точку заменить на одну из ближайших узловых. Таким образом, для любого  $m \leq n$  можно указать оптимальную с точки зрения  $\Phi(L)$  ломаную, такую, что

$$\{(x'_1, L(x'_1)), \dots, (x'_m, L(x'_m))\} \in \\ \in \{(x_1, f(x_1)), \dots, (x_1, f(x_1))\} \in f(x).$$

Множество всех таких оптимальных ломаных составит  $\mathbf{U}(L)$ , причем все они опираются на узловые точки, принадлежащие исходной кривой  $f$ , то есть в данном примере

$$\mathbf{U}(L, \Phi) = \mathbf{V}(f, \Phi).$$

Таким образом, условие квазимонотонности выполняется, и поскольку  $J(L)$  является критерием обобщенной нормы (не зависит от  $f$ ), описанная процедура кусочно-линейной сегментации является морфологическим проектором. ♦



Переход от монотонных к квазимонотонным критериям позволяет обосновать существование широкого класса *проективных морфологий на базе структурной интерполяции*, которые могут быть описаны следующим образом.

Набор образов  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subseteq \Omega$  назовем *полным структурным описанием* образа  $A$ , если образ  $A \in \Omega$  может быть полностью однозначно реконструирован путем объединения элементов из  $A$ :

$$A = \delta(A) = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n, \quad (54)$$

где  $\delta$  - операция *структурной реконструкции* образа по структурному описанию;  $\vee$  - коммутативная и ассоциативная операция объединения образов, образующая на  $\Omega$  полугруппу, ноль которой совпадает с «нулевым образом»  $\emptyset$ . Пусть далее задано (выбрано) *множество опорных элементов интерполяции*  $S \subseteq A$ . Тогда операцию *интерполяции структурного описания*  $\phi$  можно определить как отображение полного описания  $A$  на интерполированное структурное описание  $A'$

$$\phi(A, S) = A' \subseteq \{A'_1, A'_2, \dots, A'_n\} \subseteq \Omega, \quad (55)$$

где

$$A'_i = \begin{cases} A_i, & \text{если } A_i \in S, \\ \phi_i(S), & \text{если } A_i \notin S, \end{cases} \quad (56)$$

где  $\phi_i(S)$  – однозначная операция *реконструкции (интерполяции)* образа  $A_i$  по набору опорных образов из  $S$ . *Интерполированный образ* в таком случае будет иметь вид

$$A'(S) = \delta(\phi(A, S)). \quad (57)$$

Критериальная морфология на базе структурной интерполяции определяется решением следующей задачи *оптимальной морфологической интерполяции*:

$$\psi(A, \Phi) = A'(S): \Phi(A, A'(S)) = J(A, A'(S)) + \chi(A, A'(S)) + \alpha \times Q(A'(S)) \rightarrow \min(S), \quad (58)$$

где  $J(A, A'(S))$  – критерий соответствия исходного образа  $A$  и интерполированного образа  $A'$ ; предикат  $\chi(A, A'(S))$  описывает условие  $S \subseteq A$ ;  $Q(A'(S)) = \dim(S)$  – число опорных образов, используемых при интерполяции. Иными словами, процедура оптимальной морфологической интерполяции  $\psi$  (58) состоит в отыскании такой структурной интерполяции, которая обеспечивает максимальную точность интерполяции при минимальном числе используемых опорных образов. Баланс этих двух критериев определяется параметром  $\alpha$ .

Если  $J(A'(S))$  не зависит от  $A$  и при этом является *итеративно-монотонным* в том смысле, что

$$\forall B \in \mathbf{V}(A): J(B) > J(A), \quad (59)$$

то в силу рассуждений, аналогичных проведенным выше для примера интерполяции одномерной функции, оператор оптимальной структурной интерполяции (58) будет являться *интерполяционным проектором*, а соответствующая критериальная морфология на базе структурной интерполяции соответственно будет *проективной интерполяционной морфологией*.

В рассмотренном выше примере элементы описанной интерполяционной схемы имели следующий смысл:

$$\begin{aligned} A &= f(x), \quad A' = L(x), \quad ' \vee ' = ' + ' ; \\ A_i &= f_i(x) = \{ f(x_i): x = x_i; 0: x \neq x_i \}, \quad i = 1, \dots, i_{\max}; \\ S &= \{ f_{N(1)}(x), \dots, f_{N(n)}(x) \} \in \{ f(x) \cap L(x) \}; \\ \phi_i(S) &= f(x_{N(k)}) + (f(x_{N(k+1)}) - f(x_{N(k)})) \times (x_i - x_{N(k)}) / \\ & \quad / (x_{N(k+1)} - x_{N(k)}); \quad x_i \in [x_{N(k)}, x_{N(k+1)}], \quad f_{N(k)}(x), f_{N(k+1)}(x) \in S, \end{aligned}$$

где  $i_{\max}$  – число дискретных точек в области определения функции,  $n$  – число опорных точек;  $N(k)$ ,  $k = 1, \dots, n$  – упорядоченный список индексов опорных точек. Соответствующий критерий  $J$ , имеющий смысл «максимум длины графика интерполированной функции», легко обобщить на случай функций большего числа измерений. Например, для двумерной функции аналогичный критерий будет иметь вид «максимум площади поверхности графика интерполированной функции» и т.д.

Используя различные способы структурного описания изображений и различные критерии, можно строить различные практически полезные процедуры сегментации изображений на базе структурной интерполяции образов для различных предметных областей.

### 7. Проекторы на базе предиката качества и хорошо определенной функции соответствия

Как известно, *предикатом* называется функция, принимающая значение на бинарном множестве (множестве, состоящем из двух элементов). *Штрафным предикатом* назовем предикат, принимающий значения на множестве  $\{0, +\infty\}$ .

Рассмотрим теперь критерий (36), предполагая, что  $\chi(A, B)$  и  $Q(B)$  являются штрафными предикатами, а критерий  $J(A, B)$  является *хорошо определенной функцией соответствия*, то есть удовлетворяет более сильному варианту условия (37):

$$\forall A, B \in \Omega, \quad A \neq B \Rightarrow J(A, A) < J(A, B). \quad (60)$$

В таком случае легко доказать следующее утверждение.

**Утверждение 7.** Если  $Q(B)$  является штрафным предикатом, а критерий  $J(A, B)$  является *хорошо определенной функцией соответствия* (60), то критерий (36) определяет оператор, обладающий проективными свойствами.

**Доказательство.** Пусть  $L$  – решение, полученное при первом применении оператора  $\psi(A)$ :

$$L = \psi(A): J(A, L) + \alpha \times Q(L) \rightarrow \min(L).$$

Поскольку  $Q(L)$  предикат, значит,  $L$  – разрешенное значение, то есть

$$Q(L) = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \forall B \neq L: \{ J(L, L) < J(L, B), \quad Q(L) \leq Q(B) \} &\Rightarrow \\ \Rightarrow J(L, L) + \alpha \times Q(L) < J(L, B) + \alpha \times Q(B) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \psi(A) = \psi(\psi(A)), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ♦

С семантической точки зрения, то, что критерий  $Q(B)$  является штрафным предикатом, означает, что модель (множество допустимых изображений) идеального образа  $M$  в данном случае не зависит от  $J$ , полностью определяется критерием  $Q$  и может быть сразу записана в явном виде:

$$\begin{aligned} M(Q) &= \{B \in \Omega: Q(B)=0\}, \text{Pr}(A, \Phi): \\ \Omega &\rightarrow M(Q). \end{aligned} \quad (61)$$

### 8. Проекторы на базе предикатов

Рассмотрим теперь критерий (36), предполагая, что все входящие в него критерии  $J(A, B)$ ,  $\chi(A, B)$  и  $Q(B)$  являются штрафными предикатами. Прежде всего, заметим, что в таком случае комплексный критерий  $J(A, B) + \chi(A, B)$  имеет смысл рассматривать как некий единый предикат модели соответствия  $\chi(A, B)$ . В то же время любое значение  $\alpha \neq 0$  будет оказывать на результат оптимизации одинаковое воздействие, вследствие чего компонент  $\alpha \times Q(B)$  также следует упростить до  $Q(B)$  – предикат модели проекции. С учетом этого критерий (36) и оператор (39) примут вид

$$\Phi(A, B) = \chi(A, B) + Q(B), \quad (62)$$

$$\text{Pr}(A, \chi, Q) = B: \Phi(A, B, \chi, Q) \rightarrow \min(B). \quad (63)$$

Легко убедиться, что  $\Phi(A, B)$  в данном случае также является предикатом, принимающим значение на множестве  $\{0, +\infty\}$ . Данному предикату соответствует область допустимых значений  $V(A, \Phi)$ . Предикату  $Q(B)$  соответствует модель проекции (61). Предикату  $\chi(A, B)$  соответствует модель соответствия

$$M(A, \chi) = \{B \in \Omega: \chi(A, B)=0\}. \quad (64)$$

Из (49) следует, что между ОДЗ и моделями (44,45) существует очевидная связь

$$V(A, \Phi) = M(Q) \cap M(A, \chi). \quad (65)$$

**Утверждение 8.** Критерий типа (62) является хорошо определенным (32) и задает морфологический проектор (39) в том и только в том случае, когда для любого проектируемого образа  $A$  область допустимых значений  $V(A, \Phi)$  (65) содержит не более одного образа.

**Доказательство.** Доказательство этого утверждения практически тривиально. Если ОДЗ содержит более одного образа, то в силу того, что  $\Phi(A, B)$  также является предикатом, значения  $\Phi$  для всех этих образов оказываются одинаковыми, и следовательно, критерий  $\Phi$  не является хорошо определенным (имеется несколько минимальных элементов с равными значениями). ♦

Таким образом, данное утверждение определяет необходимое и достаточное условие построения проектора на базе моделей, заданных предикатами.

*Пример.* Рассмотрим условный оператор, ставящий в соответствие любой бинарной фигуре площади  $S$  фигуру в форме круга (диска) равной площади с центром, совпадающим с центром масс исходной

фигуры. Легко убедиться, что такой оператор является проектором. Морфологический коэффициент корреляции на базе такого проектора может служить признаком компактности исходного образа. В данном примере  $Q(B)$  – предикат модели объекта, описывающий множество всех круглых фигур (дисков),  $\chi(A, B)$  – предикат модели соответствия, описывающий множество всех фигур, имеющих одинаковый центр масс и равную площадь с анализируемой фигурой  $A$ . Поскольку круг (окружность) однозначно характеризуется тремя независимыми параметрами (две координаты центра и радиус), три параметра, формирующие множество  $M(A, \chi)$ , однозначно определяют только один из всех возможных кругов, принадлежащих множеству  $M(Q)$ . Если бы мы опирались на меньшее количество параметров (например, не учитывали площадь), решение задачи не было бы однозначным. И наоборот, если бы мы увеличили количество параметров в модели соответствия (например, потребовали бы равенства не только площади, но и периметра фигуры), в общем случае задача не имела бы решения. ♦

Таким образом, на базе моделей, описываемых предикатами, можно построить проектор  $\text{Pr}(A, \chi, Q)$  и соответствующую морфологию с двумя свободными структурирующими параметрами –  $\chi$  и  $Q$ .

### 9. Проекторы на базе признаков описаний и параметрических моделей

Пример, приведенный в предыдущем разделе, можно обобщить следующим образом.

Пусть дано множество образов  $\Omega$  и множество признаков (скаляров)  $\Psi$ . Опишем операцию измерения признака функцией вида

$$f: \Omega \rightarrow \Psi, \quad (66)$$

причем любому  $A \in \Omega$  соответствует единственное значение  $f(A) \in \Psi$ . Набором признаков назовем вектор

$$f(A) = \langle f_1(A), \dots, f_n(A) \rangle \in \Psi^n, \quad (67)$$

где  $\Psi^n$  – пространство признаков;  $n$  – количество признаков в наборе, или размерность пространства признаков. Соответствующую операцию признакового описания образа можно определить как отображение

$$f: \Omega \rightarrow \Psi^n. \quad (68)$$

Пусть теперь определено множество модельных образов (модель), между элементами которого и элементами пространства признаков существует взаимно однозначное соответствие

$$B \subseteq \Omega: B \leftrightarrow \Psi^n. \quad (69)$$

Определим предикаты модели проекции

$$Q(B) = \{0: B \in B; +\infty: B \notin B\} \quad (70)$$

и модели соответствия

$$\begin{aligned} \chi(A, B) &= \{0: f(A) = f(B); \\ &+\infty: f(A) \neq f(B)\}. \end{aligned} \quad (71)$$

Согласно утверждению 6 такой выбор предикатов определяет проектор  $\text{Pr}(A, \chi, Q)$ . Соответствующую морфологию можно назвать *морфологией на базе признаковых описаний*. Морфологиями на базе признаковых описаний являются, в частности, все проективные морфологические разложения [1] (морфологии Серра, морфологии на базе ортогональных разложений и др.).

Морфологии на базе признаковых описаний могут быть также рассмотрены как модульные морфологии. Действительно, взаимно однозначное соответствие (69) позволяет задать наряду с однозначной операцией прямого отображения  $\mathbf{f}$  также однозначную операцию обратного отображения, или *признакового выбора* из модели

$$f^{-1}: \Psi^n \rightarrow \mathbf{B} \subseteq \Omega, \forall \mathbf{b} \in \Psi^n: \mathbf{f}(f^{-1}(\mathbf{b})) = \mathbf{b}. \quad (72)$$

Из (70) непосредственно следует проективность оператора

$$\psi(A) = (f^{-1}(\mathbf{f}(A))). \quad (73)$$

Таким образом, пара операторов  $\{\varepsilon = \mathbf{f}, \delta = f^{-1}\}$  определяет модульную морфологию

$$\{\Omega, \Lambda = \Psi^n, \varepsilon = \mathbf{f}, \delta = f^{-1}, \psi = \text{Pr}(A, \chi, Q)\}.$$

Признаковые описания также тесно связаны с параметрическими моделями. Собственно говоря, тот факт, что между векторным пространством  $\Lambda$  и моделью  $\mathbf{B} \subseteq \Omega$  существует взаимно однозначное соответствие, уже позволяет считать, что множество  $\mathbf{B}$  параметризовано векторами из  $\Lambda$ , и обозначать элементы как  $\mathbf{V}(\lambda) \in \mathbf{B}(\Lambda)$ . Однако, как правило, в модели порождения элементов  $\mathbf{B}$  задействованы некие наборы *внутренних параметров*, отличные от измеримых *внешних признаков*. Соответственно необходимо ввести в рассмотрение: *пространство параметров*  $P \leftrightarrow \Lambda$ ; *параметрическую модель*

$$\mathbf{V}(\mathbf{p}): P \leftrightarrow \mathbf{B} \subseteq \Omega \quad (74)$$

и операцию оценки параметров

$$\eta(\mathbf{f}): \Lambda \rightarrow P. \quad (75)$$

В итоге мы получим *морфологию на базе параметрической модели*  $\{\Omega, P, \varepsilon = \eta(\mathbf{f}), \delta = \mathbf{V}(\mathbf{p}), \psi = \text{Pr}(A, \chi(A(\mathbf{p})), \mathbf{V}(\mathbf{p})), Q(\mathbf{V}(\mathbf{p}))\}$ .

**10. Морфологии функций. Критерии на базе функционалов. Проблема вычислительной эффективности морфологических алгоритмов анализа данных**

До сих пор (за исключением примеров) мы говорили об *образах* и *морфологиях образов*, структура которых, вообще говоря, может быть различна (числа, векторы, множества, функции, структуры и т.д.). Перейдем теперь к важному частному случаю морфологического анализа данных: *морфологиям дискретных функций*. Пусть

$$\Omega = F^n = \{f(x_1, \dots, x_n): X(f) \subseteq R^n \rightarrow Z(f) \subseteq R\}, \quad (76)$$

где  $F^n$  – пространство дискретных функций  $n$ -мерного дискретного аргумента;  $X(f)$  – область

определения аргумента функций  $\mathbf{x} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ ;  $Z(f)$  – область значения функций. При  $n=2$  можно говорить о *морфологиях изображений*  $f(x, y)$ .

$$\Omega = F^2 = \{f(x, y): X(f) \subseteq R^2 \rightarrow Y(f) \subseteq R\}. \quad (77)$$

Соответственно все ранее введенные понятия и утверждения, описывающие критерии морфологического проектирования применительно к критериям-функциям, необходимо рассматривать теперь применительно к *критериям-функционалам*. Естественно, все утверждения, доказанные выше в общем виде, остаются при этом справедливыми, однако появляются и новые специфические требования и возможности, связанные с тем, что функция, в отличие от абстрактного «образа», имеет *структуру регулярного массива данных*, а следовательно, для функций недостаточно только лишь доказать проективность некоторого рассматриваемого оператора. Необходимо также предложить достаточно эффективную *схему вычислительной реализации* данного оператора проекции.

Пусть область определения  $X(f)$  содержит  $N$  дискретных точек, соответствующих различному значению аргумента. Пусть область значений  $Z(f)$  также содержит  $M$  дискретных значений. Обозначим время вычисления  $\text{Pr}(f)$  как  $\tau(\text{Pr}(f))$ . Оператор  $\text{Pr}$  будем называть *реализуемым*, если его можно вычислить за конечное время. Поскольку любой оператор проекции, основанный на минимизации критерия  $\Phi(f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}))$ , может быть вычислен путем полного перебора, все критериальные проекторы являются *реализуемыми за экспоненциальное время*

$$\tau(\text{Pr}(f)) = O(M^N). \quad (78)$$

*Вычислительно эффективными* будем называть процедуры, вычисляемые за *полиномиальное время*

$$\tau(\text{Pr}(f)) = O(N^k), \quad (79)$$

где  $k$  – *показатель эффективности* алгоритма. *Быстрыми* будем называть алгоритмы, для которых  $k \leq 1$ . «Быстрые алгоритмы», выполняемые за *линейное* время, подразумевают, что информация от каждой дискретной точки функции обрабатывается один раз, при этом время обработки информации в каждой точке может быть сколь угодно большим, но постоянным (не зависящим от размера анализируемой области  $N$ ).

Вопрос вычислительной реализуемости является центральным вопросом, определяющим практическую применимость разработанных методов морфологического анализа. В этом смысле существенным достоинством рассмотренных в предыдущем разделе проекторов на базе признаковых описаний и параметрических моделей является то, что для их вычисления всегда можно построить эффективные алгоритмы. В частности, любой морфологический проектор на базе разложений [1] имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Pr}(A, \mathbf{E}) &= \bigvee_{i=1, \dots, m} \text{Pr}(A, E_i) = \\ &= \bigvee_{i=1, \dots, m} \mathbf{a}_i \bullet \mathbf{E}_i, \end{aligned} \quad (80)$$

где  $\mathbf{E} = \langle E_1, \dots, E_m \rangle$  – базис разложения,  $E_i$  – элемент базиса;  $m$  – размерность базиса. При этом время вычисления одного линейного проектора (коэффициента линейной морфологической корреляции), в худшем случае является *линейным*

$$\forall i: \tau(\text{Pr}(A, E_i)) \leq O(N), \quad (81)$$

откуда следует

$$\tau(\text{Pr}(A, \mathbf{E})) = O(\sum_{i=1, \dots, m} \tau(\text{Pr}(A, E_i))) \leq O(m \times N). \quad (82)$$

Иными словами, если считать  $m \sim N^{k-1}$ , такой проектор может быть вычислен за  $k$ -полиномиальное время. В частности, если размер массива-аккумулятора примерно равен размеру исходного массива данных, типичное значение  $k$  будет составлять 2. Если же учесть, что, вообще говоря, размерность базиса разложения не зависит от размера области определения, и считать  $m = \text{const}(N)$ , в этом случае выражение (81) следует трактовать как линейную оценку времени вычислений и считать процедуру вычисления проектора на базе разложения *быстрой*. Более того, если оператор вычисления одного линейного проектора является *локальным*, то есть требует обработки не  $N$ , а всего лишь  $t$  точек, причем  $t = \text{const}(N) \ll N$ , тогда

$$\begin{aligned} \tau(\text{Pr}(A, E_i)) &= O(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \tau(\text{Pr}(A, \mathbf{E})) &= O(\sum_{i=1, \dots, m} \tau(\text{Pr}(A, E_i))) = \\ &= O(m \times t) = O(m), \end{aligned} \quad (83)$$

то есть время вычисления такого *морфологического проектора на базе локальных проекций* гарантировано будет линейным даже при  $m \sim N$ .

Для проекторов на базе неоднородных логических предикатов (логических моделей) во многих случаях удастся построить эффективные модульные (иерархические) процедуры вычисления. В общем случае задачи верификации логических моделей-предикатов на множестве уже выделенных (при помощи морфологических разложений) первичных примитивов решаются методом логического программирования [5], оценки ресурсоемкости которого хорошо изучены ([6]).

Наиболее общим методом эффективного вычисления морфологических проекторов общего вида на базе критериев-функционалов, не обязательно основанных на проективных разложениях и предикатах, является *метод динамического программирования* [7]. Рассмотрению этого метода посвящен следующий подраздел данной статьи. К сожалению, далеко не все важные с практической точки зрения структуры данных допускают поиск оптимальных решений, удовлетворяющих заданным критериям методом динамического программирования (см. обсуждение этого вопроса ниже), однако, с точки зрения реализации операторов критериальной морфологии, этот метод имеет два основных достоинства. Во-первых, это неитеративный метод оптимизации, то есть время обработки одного массива данных заданного размера всегда конечно и заранее известно, что позволяет оценить *вычислительную трудоемкость*

задачи. Во-вторых, данный метод обеспечивает нахождение не локального, а глобального экстремума рассматриваемого критерия качества, что, в свою очередь, позволяет говорить об *оптимальности*, а не псевдо- или квазиоптимальности полученных результатов, а также трактовать полученный результат фильтрации или сегментации изображений именно как *проекцию* исходного изображения на некоторый класс заданных структур.

### 11. Построение морфологических проекторов методом динамического программирования

Метод динамического программирования легко описать для случая проектирования одномерных функций путем оптимизации критерия штрафа в пространстве  $F^1$ .

*Пример: проективные морфологии одномерных функций.* Рассмотрим решение задачи морфологической *фильтрации* одномерной функции  $f(x)$  как задачу поиска экстремума функционала штрафа

$$\begin{aligned} \Phi(f(x), L(x)) &= J(f(x), L(x)) + \alpha \times Q(L(x)), \\ L(x): \Phi(f(x), L(x)) &\rightarrow \min(L(x)), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J(f(x), L(x)) &= \sum_{i=0, \dots, N-1} |f(x_i) - L(x_i)|, \\ Q(L(x)) &= \sum_{i=0, \dots, N-1} (L(x_i) - L(x_{i-1}))^2, \end{aligned}$$

$\{x_0, \dots, x_{N-1}\}$  – множество дискретных значений аргумента рассматриваемой функции в ее области определения; критерий  $Q$  описывает требование «гладкости» получаемой функции-решения. Заметим, что критерий  $J$  в данном случае является критерием минимума нормы разности для нормы  $L^1$  (сумма модулей разности, *манхэттенское расстояние*), вследствие чего критерий  $\Phi$  является хорошо определенным и соответствующая процедура минимизации дает морфологический проектор в соответствии с доказанным выше утверждением.

Представим функционалы качества в следующей *аддитивно-рекурсивной форме*:

$$\begin{aligned} J(f(x), L(x)) &= J(x_{N-1}): \\ J(x_i) &= J(x_{i-1}) + \Delta J(x_i, L(x_i)); \quad J(0) = \Delta J(0, L(0)), \\ Q(L(x)) &= Q(x_{N-1}): \\ Q(x_i) &= Q(x_{i-1}) + \Delta Q(L(x_{i-1}), L(x_i)); \quad Q(0) = 0, \\ \Delta J(x_i, L(x_i)) &= |f(x_i) - L(x_i)|, \\ \Delta Q(L(x_{i-1}), L(x_i)) &= (L(x_{i-1}) - L(x_i))^2. \end{aligned}$$

Простейшая реализация решения данной задачи методом динамического программирования (ДП) основана на использовании двумерного *аккумулятора*  $A(x, l)$  размера  $(N-1) \times M$ , где  $M$  – количество элементов дискретизации области значений рассматриваемой функции. Алгоритм отыскания решения выполняется в два прохода и имеет следующий вид.

#### Прямой проход динамического программирования

Шаг 0. Инициализировать значения крайнего левого столбца аккумулятора:

$$A(0, l) = \Delta J(0, l), \quad l = 0..M-1.$$

Шаги  $i=1..N-1$ . Определить значение каждого следующего столбца аккумулятора по формуле:

$$A(x_i, l) = \Delta J(x_i, l) + \min_t \{ A(x_{i-1}, t) + \alpha \times \Delta Q(t, l) \}, t, l = 0..M-1.$$

Обратный проход динамического программирования

Шаг 0. Инициализировать значение крайнего правого элемента решения:

$$L(x_{N-1}) = \arg \min_l \{ A(x_{N-1}, l) \}, l = 0..M-1.$$

Шаги  $i=N-2..0$ . Справа налево определить значение всех следующих элементов решения по формуле:

$$L(x_i) = \arg \min_l \{ A(x_i, l) + \alpha \times \Delta Q(l, L(x_{i+1})) \}, l = 0..M-1.$$

Конец алгоритма

Описанный алгоритм позволяет также решить задачу *кусочно-постоянной сегментации*, если изменить критерий качества решения на следующий:

$$\Delta Q(L(x_{i-1}), L(x_i)) = \begin{cases} 0, & \text{если } L(x_{i-1}) = L(x_i), \\ 1, & \text{если } L(x_{i-1}) \neq L(x_i). \end{cases}$$

Иными словами, штрафной функционал качества решения  $Q$  в этом случае будет иметь значение, равное числу переходов от одной области постоянного значения к другой. Если при этом выбрать весовой коэффициент  $\alpha$  достаточно большим, то любое изменение значения  $L(x)$  будет оплачиваться столь дорогим «штрафом», что оно окажется оправданным лишь при достаточно сильном соответствующем уменьшении критерия соответствия  $J(f(x), L(x))$ .

Выбор критерия соответствия  $J$  также может отличаться от приведенного выше.

Монотонный проектор *ДП-открытие* определяется функционалом

$$J_{\text{open}}(f(x), L(x)) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \exists x: f(x) < L(x), \\ -\|L(x)\|^2, & \text{если } f(x) \geq L(x). \end{cases}$$

Монотонный проектор *ДП-закрытие* определяется функционалом

$$J_{\text{close}}(f(x), L(x)) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \exists x: f(x) > L(x), \\ \|L(x)\|^2, & \text{если } f(x) \leq L(x). \end{cases}$$

Данные критерии являются, очевидно, критериями экстремальной обобщенной нормы.

Проектор минимальной среднеквадратичной нормы отклонения (только для задачи кусочно-постоянной сегментации) определяется функционалами:

$$J_{\text{LSE}}(f(x), L(x)) = \sum_x (f(x) - L(x))^2, \\ Q_{\text{SEGM}}(L(x)) = n\alpha,$$

где  $n$  – число скачков яркости функции  $L(x)$  на данном интервале. Как видно, данный критерий не является проектором минимального расстояния, поскольку  $J_{\text{LSE}}$  требует минимизации не нормы  $L^2$  разности функции и ее проекции, а *квадрата нормы*, тем не менее можно показать, что за счет удачного выбора функционала  $Q_{\text{LSE}}(L(x))$  оператор

$\text{Pr}(f(x), J_{\text{LSE}}, Q_{\text{SEGM}}, \alpha)$  также является проектором. Платой за это становится невозможность изменять параметр  $Q$ , и в нашем распоряжении остается лишь один настроечный параметр – коэффициент сложности модели  $\alpha$ . ♦

Легко убедиться, что в данном примере каждый из  $N$  элементов анализируется ровно два раза – на прямом и на обратном проходе, причем время вычислений пропорционально размерности аккумулятора:

$$\tau(\text{Pr}(f(x), \Phi)) = O(M \times N) + O(M \times N) = O(N),$$

то есть описанный алгоритм вычисления морфологического проектора методом динамического программирования выполняется за *линейное* время. За такой же порядок времени вычисляются и монотонные проекторы на базе критериев экстремума нормы проекции.

В другом приведенном ранее примере процедура оптимальной сегментации на базе кусочно-линейной интерполяции одномерной функции также может быть реализована методом динамического программирования. В этом случае проектор является не монотонным, а квазимонотонным, вид функционала несколько сложнее (он требует перебора всех возможных пар узловых точек) и оценка времени выполнения получается порядка  $O(N^2)$ , что дает уже не столь быстрый, но во всяком случае эффективный алгоритм вычисления проектора.

В наиболее общем случае для одномерных функций можно дать следующие определения. Пусть область определения проектируемой функции  $f(x)$  представляет собой дискретный отрезок  $X = [x_0, x_{N-1}]$ . Множество значений функции  $f(x)$  на любом отрезке  $X' = [x_i, x_j] \subseteq X$  обозначим

$$f(X') = \{f(x_i), \dots, f(x_j)\}. \quad (84)$$

Тогда функционал  $\Phi(f(x), g(x))$  будем называть *ДП-вычислимым* на  $X$ , если его можно представить в следующей *аддитивно-рекурсивной форме*

$$\Phi(f(x), g(x)) = \Phi(f(X), g(X)): \\ \Phi(f([x_0, x_0]), g([x_0, x_0])) = \Phi_0(f(x_0), g(x_0)), \\ \forall 0 < j < N: \Phi(f([x_0, x_j]), g([x_0, x_j])) = \\ = \Phi(f([x_0, x_{j-1}], g([x_0, x_{j-1}])) + \Delta \Phi(f([x_0, x_j]), g([x_0, x_j])). \quad (85)$$

Для критериев-функционалов, представимых в форме (85), всегда может быть построена эффективная процедура вычисления морфологического проектора. Таким образом, для функций из  $F^1$  метод динамического программирования является оптимальным способом вычисления морфологических проекторов на базе штрафных функционалов общего вида.

С методической точки зрения, описанная схема построения ДП-проекторов одномерных функций принципиально важна, так как она позволяет проверить, продемонстрировать и проиллюстрировать на конкретных примерах все теоретические результаты, полученные выше в общем виде (см. примеры реализации различных морфологических операторов

в следующем разделе статьи). Более того, метод динамического программирования для построения проекторов одномерных функций может использоваться и в области морфологического анализа двумерных изображений, а именно в задачах фильтрации, сегментации и сравнения следующих типов данных:

- *одномерных статистик*, получаемых из изображения: профилей, прорезок, групп прорезок, проекций по направлениям, одномерных разверток (по регулярным сканам, кривым Пеано и др.);
- *контуров* двумерных фигур и областей;
- *одномерных сигналов вдоль эпиполярных линий стереопары* в задаче стереорекострукции трехмерных данных.

К сожалению, обобщение метода динамического программирования на случай оптимизации функций  $n > 1$  аргумента сталкивается с серьезными проблемами, поскольку координаты точек из  $R^n$ , в отличие от точек  $R^1$ , не являются полностью упорядоченными. По этой причине *граф структурных связей* между элементами (пикселями) изображения, в отличие от аналогичного графа для одномерных функций, имеет вид не *цепи*, а *решетки*, то есть включает множество *циклов*. Между тем, как известно из теории динамического программирования, этот метод работает только для таких структур, граф структурных связей между элементами которых имеет вид *ациклического графа* (ACG) или *дерева* [8], поскольку только для таких графов существует возможность в любой точке разделить все влияющие на результат вычислений элементы на две группы: те, что находятся «выше» по дереву, и те, что «ниже». Таким образом, растровое изображение (прямоугольная решетка пикселей) оказывается неподходящей структурой данных для непосредственного применения методов динамического программирования.

Эта проблема породила, с одной стороны, ряд работ, предлагающих другие вычислительные техники для оптимизации целевых критериев на дискретных двумерных функциях, среди которых выделяется, в частности, группа подходов, основанных на технике «имитационного отжига» [9], а с другой стороны – стремление к разработке таких структурных моделей двумерных и трехмерных объектов, которые бы достаточно адекватно описывали яркостно-геометрическую и/или топологическую структуру изображения, но при этом, в отличие от решетки пикселей, имели искомый вид ациклического графа.

К сожалению, методы *распространения состояний* (evidence propagation) типа имитационного отжига являются существенно итеративными и, как и большинство других итеративных методов оптимизации, не гарантируют сходимости решения к искомому глобальному оптимуму. С практической точки зрения, получаемые этими методами квазиоптимальные решения во многих случаях являются «достаточно хорошими», однако, с точки зрения реализации морфологических проекторов, квазиопти-

мальность является принципиальным недостатком. Поскольку все доказательства проективности тех или иных критериев по необходимости основаны на том, что эти критерии являются «хорошо обоснованными», то есть обеспечивают единственность оптимального решения, квазиоптимальный вычислительный метод сразу превращает хорошо обоснованный критерий в плохо или неопределенно обоснованный, что автоматически делает реализованный таким образом оператор непроективным. Следовательно, мы вынуждены двигаться по второму пути и искать адекватные каждой конкретной задаче способы реализации методов динамического программирования для двумерных и трехмерных данных.

Таких попыток известно множество, причем наиболее успешными, как и следовало ожидать, они оказываются при описании изображений объектов «высокого» уровня – например, структурных остовов в методе двумерных и трехмерных *обобщенных цилиндров* [10]. Однако чем ближе мы оказываемся к уровню растровых данных, тем труднее описать их ациклическими графами так, чтобы не были потеряны какие-то существенные характерно двумерные свойства изображения. Впрочем, для некоторых частных задач такие решения найдены. Так, для анализа бинарных двумерных образов хорошо известна техника построения *морфологических остовов* (skeletons) [2,3] с последующим разрывом циклов в наиболее «напряженных» узлах. Для другой специфической задачи – стерео отождествления – во многих работах используется граф, представляющий изображение в виде строковых цепочек, связанных между собой только по одному опорному столбцу [11]. Такое представление в виде «дерева строк» достаточно адекватно задаче анализа ректифицированных стереопар, в которых строки двух изображений действительно попарно соответствуют друг другу, но вряд ли может быть признано в качестве общей структуры, универсально пригодной для решения основных типовых задач анализа изображений. Таким образом, вопрос о выборе структуры представления двумерных и трехмерных растровых данных в методе динамического программирования остается на сегодня предметом интенсивных исследований в каждой конкретной предметной области.

Для решения задач структурной морфологической интерполяции (58) полутоновых изображений было предложено использовать так называемые «стековые деревья», идея построения которых восходит, с одной стороны, к идеям построения бинарных морфологических остовов [3], а с другой – к стековому представлению (threshold decomposition) полутоновых изображений [12]. Представляется, что такая гарантированно ациклическая структура, обеспечивающая полную реконструкцию растрового изображения и при этом сохраняющая все его топологические особенности, может найти применение и во многих других областях морфологического анализа изображений.

**12. Примеры проективной морфологической фильтрации на базе целевых критериев различных типов**

Проиллюстрируем полученные выше теоретические результаты примерами построения простейших операторов морфологической фильтрации одномерных функций, реализуемых методом динамического программирования, описанных в предыдущем разделе.

На рис.2-6 представлены примеры применения одномерных монотонных операторов проективной морфологической фильтрации с различными параметрами сглаживания.

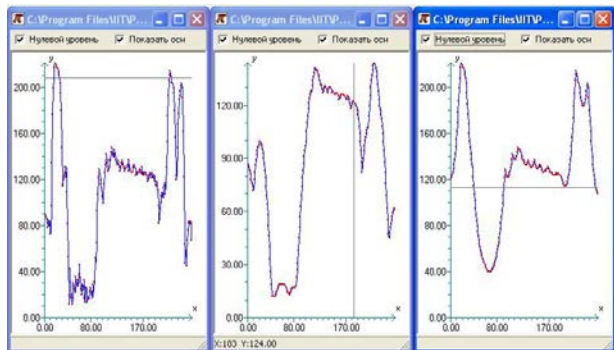


Рис.2. Слева – исходная функция, далее результаты применения операторов ДП-фильтрации: DP-Open ( $\alpha=200$ ) и DP-Close( $\alpha=200$ )

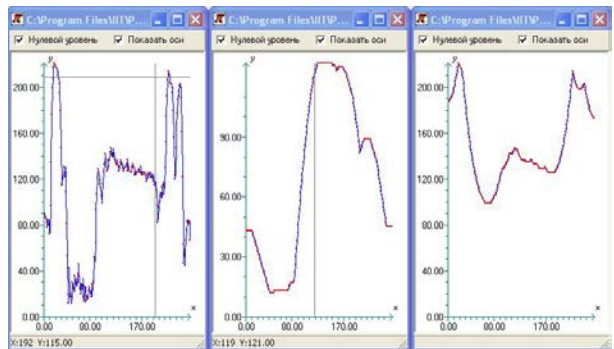


Рис.3. Слева – исходная функция, далее результаты применения операторов ДП-фильтрации: DP-Open ( $\alpha=1000$ ) и DP-Close( $\alpha=1000$ )

На рис.4-5 представлены примеры применения одномерных операторов проективной морфологической сегментации с различными параметрами сглаживания.

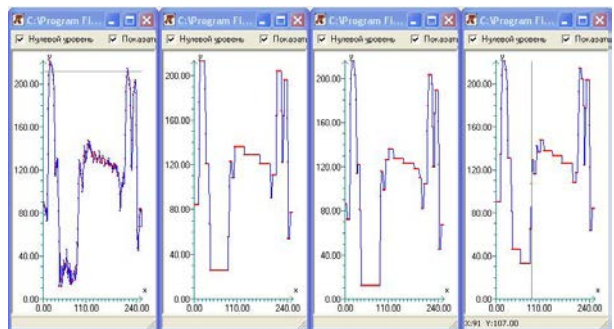


Рис.4. Слева – исходная функция, далее результаты применения операторов ДП-сегментации: DP-LSE ( $\alpha=500$ ), DP-Open ( $\alpha=10000$ ), DP-Close( $\alpha=10000$ )

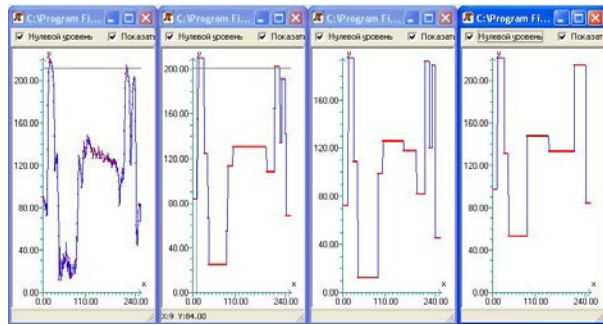


Рис.5. Слева – исходная функция, далее результаты применения операторов ДП-сегментации: DP-LSE ( $\alpha=2000$ ), DP-Open ( $\alpha=100000$ ), DP-Close( $\alpha=100000$ )

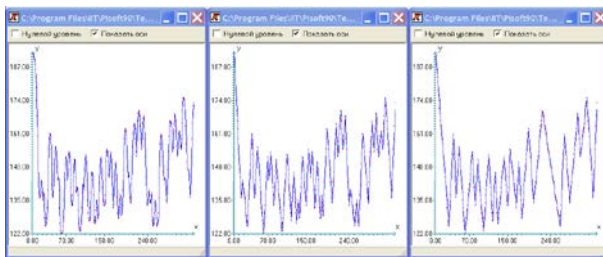


Рис.6. Пример морфологической сегментации одномерной функции на базе интерполяции: a – исходная функция; b – результат сегментации ( $\alpha=5$ ); c – результат сегментации ( $\alpha=15$ )

Проведенные численные эксперименты также подтвердили, что если к любой одномерной функции  $f(x)$  применить среднеквадратичную ДП-фильтрацию или ДП-фильтрацию по критерию минимума расстояния с некоторым  $\alpha$ , то любая дальнейшая ДП-фильтрация с тем же  $\alpha$  более не изменяет полученное решение. То есть существует такое множество « $\alpha$ -стабильных» функций, для которых обе монотонные  $\alpha$ -проекции равны среднеквадратичной  $\alpha$ -проекции и равны самой исходной функции:

$$f(x) = Pr(f(x), J_{LSE}, Q, \alpha) = Pr_o(f(x), J_{Open}, Q, \alpha) = Pr_c(f(x), J_{Close}, Q, \alpha).$$

На рис.6 также показан пример проективной морфологической сегментации одномерной функции на базе кусочно-линейной интерполяции при различных значениях параметра  $\alpha$ , регулирующего сложность структурной модели. Соответствующая процедура сегментации на базе кусочно-линейной интерполяции была описана в разделе 6 данной статьи. Вычислительная реализация данной процедуры также осуществлялась методом динамического программирования.

**Заключение**

В данной статье дано формальное описание обобщенной проективной морфологии. Приводится краткая сводка ее свойств и способов ее применения в задачах анализа изображений. Исследованы различные конструктивные схемы построения проективных операторов анализа цифровых данных.

Рассмотрены алгебраические основы обобщенной проективной морфологии. Базовым понятием здесь является *оператор проекции*, который, будучи применен вторично, более не изменяет результатов своего первичного применения. Множество *собственных* (стабильных) элементов проектора называется *модельным множеством*, или *моделью* образа. Для сравнения образа с моделью определен *морфологический коэффициент корреляции*. Определено понятие *относительной морфологической сложности* моделей. Описано использование морфологического коэффициента корреляции для решения задач классификации (распознавания) образов и обнаружения образов, заданных моделями, на изображениях. Для параметризованных проекторов введено понятие морфологических спектров по параметрам.

Описана *модульная схема* построения проективных операторов на базе пары сопряженных непроективных операторов – *прямого* и *обратного* отображения. Сформулировано *необходимое и достаточное условие* построения модульной проективной морфологии. Описаны *альтернативные модульные морфологии* на базе единого прямого и различных обратных операторов. В качестве обобщения двухуровневой модульной схемы описана *n-уровневая иерархическая модульная схема* проективного морфологического анализа.

Описана обобщенная схема построения проективных операторов на основе оптимальных критериев. Сформулированы *необходимое условие проективности* для оператора на базе критерия, а также *условия монотонности и квазимонотонности области допустимых значений проектора ОДЗ*. Предложен *стандартный критерий выпуклого штрафа*, включающий *критерий соответствия* проекции и проектируемого образа, *критерий (предикат) допустимости* решения, *критерий качества* проекции, характеризующий ее принадлежность модели и *структурирующий параметр*, обеспечивающий компромисс между требованиями соответствия и качества. Показано, что структурирующий параметр определяет *морфологическую сложность модели*, численной характеристикой которой для конкретного изображения является дифференциальный морфологический спектр по этому параметру. Определены и исследованы проекторы минимального расстояния (максимального сходства), а также проекторы минимальной (максимальной) нормы проекции. Исследованы и доказаны свойства этих проекторов. В частности, показано, что собственное множество (модель) проектора минимума нормы разности включает собственные множества (модели) проекторов на базе минимума и максимума нормы проекции, если совпадают значения параметра сложности и вид критерия качества. Предложен и описан широкий класс *проективных морфологий на базе структурной интерполяции*.

Описаны проекторы на базе критериев-предикатов, включающих *предикат модели соответствия*

*и предикат модели проекции*. Сформулировано необходимое и достаточное условие проективности для таких критериев. Описаны проекторы на базе признаковых описаний и параметрических моделей. Показана их связь с проекторами на базе критериев-предикатов, а также с модульными проекторами.

Рассмотрены вопросы построения эффективных в вычислительном смысле алгоритмов построения морфологических проекторов на базе критериев-функционалов. Показана вычислительная эффективность проекторов на базе признаковых описаний и параметрических моделей, в частности, морфологических проекторов на базе разложений. В качестве эффективного метода вычисления морфологических проекторов общего вида на базе критериев-функционалов, не обязательно основанных на проективных разложениях и предикатах, предложен *метод динамического программирования*. Приведены примеры построения операторов морфологической фильтрации одномерных функций, реализуемых методом динамического программирования.

#### Литература

1. Сравнение и локализация фрагментов изображений с использованием проективных морфологий. / Ю.В. Визильтер, С.Ю. Желтов // Вестник компьютерных и информационных технологий, -N2, -2008, -С.14-22.
2. **Pavel, M.** Fundamentals of Pattern Recognition. / Pavel M.// Marcel Dekker. Inc. New York. -1989.
3. Image Analysis and Mathematical Morphology, /Serra J.//Academic Press. London. -1982.
4. Морфологический анализ изображений. /Пытьев Ю.П.// Доклады АН СССР. -1983. -Т. 269. -№ 5. -С.1061-1064.
5. **Братко, И.** Программирование на языке Пролог для искусственного интеллекта./ И.Братко // М: Мир -1990. -С.560.
6. **Хоггер, К.** Введение в логическое программирование./ К. Хоггер // М: Мир -1988. -С.348.
7. **Бердж, В.** Методы рекурсивного программирования./ В. Бердж // М: Машиностроение -1983. -С.248.
8. A Linear Programming Approach to Max-sum problem: A Review. Research reports of CMP / T. Werner // Czech Technical University in Prague. -No 25, -2005. -P.46.
9. Stochastic relaxation, Gibbs distributions, the Bayesian restoration of images. – IEEE Trans. / S. Geman, D. Geman // Pattern Analysis, Machine Intelligence. -1984, -№6. P.721-741.
10. **Форсайт А., Понс Дж.** Компьютерное зрение. Современный подход./ А. Форсайт, Дж. Понс // М: Вильямс. -2004. -С.928.
11. **Mottl V., Blinov A., Kopylov A., Kostin A.** Optimization techniques on pixel neighborhood graphs for image processing. Graph-Based Representations in Pattern Recognition (J.-M. Jolion and W.G. Kropatsch, ed.). / V. Mottl, [and other] //Computing, Supplement 12. Springer-Verlag/Wien. -1998 -P. 135-145.
12. **Yeong-Chyang Shih, F.,** Threshold Decomposition of gray Scale Morphology into Binary Morphology. IEEE trans. on pattern analysis, machine intelligence./ Shih F Yeong-Chyang., O.R. Mitchell // vol, II/ -№1, January 1989.



# GENERALIZED PROJECTIVE MORPHOLOGY

Y.V. Vizilter<sup>1</sup>

<sup>1</sup>State Research Institute of Aviation Systems, Moscow, Russia

## Abstract

The description of proposed generalized projective morphology is given. Algebraic basis of projective morphology is considered. Formal and criteria-based schemes for morphology design are described. Some sufficient conditions of projectiveness for criteria-based morphological operators are proved. Projectors are proposed and explored based on: minimal distance (maximal similarity) criterion, maximal norm of projection, predicate-type criterions, feature vectors, parametric models and dynamic programming procedures. The class of criteria-based morphologies based on structural interpolation operators is proposed.

Key words: Mathematical Morphology, Image Processing, Image Analysis.

Citation: Vizilter YuV. Generalized Projective Morphology. Computer Optics 2008; 32(4): 384-99.

## References

- [1] Vizilter YuV, Zheltov SYu. Comparison and localization of image elements using projective morphology [In Russian]. Vestnik Komp'yuternykh i Informatsionnykh Tekhnologii (Herald of Computer and Information Technologies) 2008; 2: 14-22.
- [2] Pavel M. Fundamentals of Pattern Recognition. Marcel Dekker. Inc. New York 1989.
- [3] Serra J. Image Analysis and Mathematical Morphology. Academic Press, London 1982.
- [4] Pytiev YuP. Morphological image analysis [In Russian]. Doklady AN SSSR (Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR) 1983; 269(5): 1061-1064.
- [5] Bratko I. Prolog programming for artificial intelligence [In Russian]. Moscow: "Mir" Publisher 1990; 560 p.
- [6] Hogger K. Introduction to logic programming [In Russian]. Moscow: "Mir" Publisher 1988; 348 p.
- [7] Berge V. Methods of recursive programming [In Russian]. Moscow: "Mashinostroenie" (Mechanical Engineering) Publisher 1983; 248 p.
- [8] Werner T. A Linear Programming Approach to Max-sum problem: A Review. Research reports of CMP. Czech Technical University in Prague 2005; 25: 46.
- [9] Geman S, Geman D. Stochastic relaxation, Gibbs distributions, the Bayesian restoration of images. IEEE Trans. Pattern Analysis, Machine Intelligence 1984; 6: 721-741.
- [10] Forsyth D, Ponce J. Computer vision: a modern approach [In Russian]. Moscow: "Williams" Publisher 2004; 928 p.
- [11] Mottl V, Blinov A, Kopylov A, Kostin A. Optimization techniques on pixel neighborhood graphs for image processing. Graph-Based Representations in Pattern Recognition. J.-M. Jolion and W.G. Kropatsch, ed. Computing, Supplement 12. Springer-Verlag/Wien 1998: 135-145.
- [12] Yeong-Chyang Shih F, Mitchell O.R. Threshold Decomposition of gray Scale Morphology into Binary Morphology. IEEE trans. on pattern analysis, machine intelligence. January 1989; II(1).