

РАСЧЁТ РЕЗОНАНСНОГО РАДИУСА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ОСВЕЩЕНИИ ЕГО ПЛОСКОЙ ВОЛНОЙ ТЕ-ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА

Котляр В.В., Козлов Д.А., Ковалёв А.А.

Институт систем обработки изображений РАН,

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет) (СГАУ)

Аннотация

При освещении плоской волной диэлектрического цилиндра с круглым сечением определённого резонансного радиуса внутри цилиндра формируется мода шепчущей галереи (ШГ). Этот резонансный радиус диэлектрического цилиндра можно численно найти из условия максимума модуля соответствующего коэффициента разложения в ряд по функциям Бесселя амплитуды напряжённости электрического поля световой волны с ТЕ-поляризацией. Получены уравнения из цилиндрических функций, позволяющие приближённо рассчитывать резонансный радиус цилиндра. Например, для радиуса цилиндра, в котором формируется мода ШГ с номером 26, эти уравнения дают правильно первые 8 значащих цифр радиуса. Для цилиндра с показателем преломления 1,59 и резонансным радиусом 3,469239 от длины волны в цилиндре возбуждается мода ШГ с номером 30, которая формирует фокусное пятно шириной 0,15 от длины волны с максимальной интенсивностью снаружи цилиндра в 1500 раз большей, чем интенсивность падающего света.

Ключевые слова: вычислительный эксперимент, мода шепчущей галереи в диэлектрическом цилиндре, резонансный радиус диэлектрического цилиндра.

Введение

В последнее время много внимания уделяется изучению субволновой фокусировки лазерного света на микрочастицах, в том числе на микросферах и микроцилиндрах, радиусы которых сравнимы с длиной волны света [1–5]. Так, в [1–4] численно изучалась фокусировка многослойными микросферами [1], сфероидальными микрочастицами [2] и двухслойными микросферами [3, 4]. При этом минимальный диаметр фокусного пятна по полуспаду интенсивности был равен $\text{FWHM}=0,4\lambda$ [2], а максимальная глубина фокуса равна $\text{DOF}=20\lambda$ [3], $\text{DOF}=22\lambda$ [4] и $\text{DOF}=108\lambda$ [5]. В [6, 7] рассматривалась фокусировка микроцилиндром: эллиптическим [6] и многослойным [7]. Минимальный размер фокуса был получен $\text{FWHM}=0,46\lambda$ [7]. В [8, 9] моделировалась резонансная фокусировка света микросферами. В [8] с помощью диэлектрической микросферы вместе с нанометровым металлическим шариком получена резонансная фокусировка света в пятно с диаметром $\text{FWHM}=0,25\lambda$, а для диэлектрической микросферы получен резонансный фокус размером $\text{FWHM}=0,40\lambda$ [9]. В [10] аналитически с помощью ряда из функций Бесселя рассматривалась резонансная фокусировка ТЕ-поляризованного лазерного света микроцилиндром из полиэстера (показатель преломления $n=1,59$). Для 18-й моды (мода шепчущей галереи) получен фокус вне микроцилиндра размером $\text{FWHM}=0,22\lambda$. В [11] численно показано, что в течение нескольких пикосекунд при прохождении светового импульса через диэлектрический цилиндр с резонансным радиусом внутри цилиндра возбуждается и накапливается по энергии мода шепчущей галереи (ШГ). Вернее, две моды ШГ, которые распространяются вблизи поверхности цилиндра навстречу друг другу по часовой и против часовой стрелки и формируют стоячую моду ШГ. После прохождения пикосекундного импульса через цилиндр энергия моды ШГ, запасённая внутри цилиндра, со временем уменьшается: мода «вытекает» из цилиндра. Модам шепчущей галереи в микрорезонаторах посвящено много работ (смотри обзор в [12]). Впервые моды ШГ рассмотрел в 1910 году Рэлей [13]. В современных работах рассматриваются моды ШГ в сферических [14, 15], сфероидальных [16], тороидальных [17], дисковых [18] и других микрорезонаторах. Так как в объёмных микрорезонаторах фактор $Q=\lambda/\Delta\lambda$ (или добротность резонанса), характеризующий качество резонанса, достигает в эксперименте экстраординарной величины 10^9 [15], то они рассматриваются в большем числе публикаций. В идеальном случае (когда потери в резонаторе только на излучение) Q -фактор может достигать 10^{57} [12, 15] для диэлектрической сферы диаметром 100 мкм. В цилиндрическом резонаторе добротность резонанса имеет меньшую величину, и поэтому почти нет работ, посвящённых модам ШГ в диэлектрических цилиндрах. Например, в [19] рассматривались спиральные моды ШГ в обычном одномодовом оптическом волокне.

В данной работе рассматриваются моды ШГ, возбуждающиеся при освещении плоской волной монохроматического света диэлектрического цилиндра с круглым сечением определённого радиуса. Этот резонансный радиус диэлектрического цилиндра можно численно найти из условия максимума модуля коэффициента разложения в ряд по функциям Бесселя амплитуды напряжённости электрического поля световой волны с ТЕ-поляризацией. Получены уравнения из цилиндрических функций, позволяющие приближённо рассчитывать резонансный радиус цилиндра. Приведено несколько простых приближённых формул, позволяющих рассчитывать резонансный радиус цилиндра с правильными первыми 2–3 значащими цифрами. Рассчитаны резонансные радиусы для мод

ШГ с номерами от 3 до 30. Также приведены расчётные зависимости максимальной интенсивности на оптической оси сразу за поверхностью цилиндра, ширины и глубины фокуса в зависимости от номера моды ШГ или от резонансного радиуса цилиндра.

1. Расчёт резонансного радиуса микроцилиндра с помощью поиска максимума коэффициента в разложении поля по цилиндрическим функциям

Аналитическое решение задачи дифракции плоской волны на бесконечно протяжённом диэлектрическом цилиндре с круглым сечением было дано в книге [20]. Решение уравнения Гельмгольца для напряжённости электрического поля с ТЕ-поляризацией внутри цилиндра, найденное путём разделения переменных в полярных координатах, представляет собой разложение в ряд по функциям Бесселя:

$$E_y(r, \phi) = \sum_j i^j b_j J_j(knr) e^{ij\phi}, \tag{1}$$

где k – волновое число падающего излучения, n – показатель преломления цилиндра, а коэффициент b_j определяется выражением:

$$b_j = \frac{J_j(z)H_j^{(1)'}(z) - J_j'(z)H_j^{(1)}(z)}{J_j(nz)H_j^{(1)'}(z) - nJ_j'(nz)H_j^{(1)}(z)}, \tag{2}$$

где $z = kR$, R – радиус цилиндра, $J_m(x)$, $H_m^{(1)} = J_m(x) + iY_m(x)$ – функции Бесселя и Ханкеля, $Y_m(x)$ – функция Неймана. Будем численно искать максимальное значение модуля коэффициента (2), упростив его, воспользовавшись известным свойством цилиндрических функций (выражением для вронскиана):

$$b_m = \frac{J_m(z)H_m^{(1)'}(z) - J_m'(z)H_m^{(1)}(z)}{J_m(nz)H_m^{(1)'}(z) - nJ_m'(nz)H_m^{(1)}(z)} = \frac{2i}{\pi z} \frac{1}{J_m(nz)H_m^{(1)'}(z) - nJ_m'(nz)H_m^{(1)}(z)}. \tag{3}$$

С математической точки зрения равенство нулю знаменателя (2) или (3) означает равенство нулю детерминанта однородной системы линейных алгебраических уравнений 2-го порядка для нахождения коэффициентов b_m в (1) при условии, что цилиндр не освещается светом.

На рис. 1 показан модуль коэффициента (3) $m = 18$ в зависимости от радиуса цилиндра R в длинах волн: на рис. 1а диапазон радиусов равен $0 \leq R \leq 10\lambda$, а на рис. 1б увеличенный фрагмент этой зависимости и диапазон радиусов равен $2,1\lambda \leq R \leq 2,3\lambda$.

Из рис. 1б видно, что максимальное значение коэффициента, равное 12, достигается при радиусе $R_{18} = 2,174987\lambda$, а ширина максимума на рис. 1б по полуспаду равна $\Delta R = 0,003\lambda$. То есть при изменении радиуса цилиндра (при той же длине волны света) всего на 0,14% в цилиндре уже не будет резонанса, то есть не будет возбуждаться мода [11].

На рис. 2 приведена зависимость модуля $|b_m|$ другого коэффициента (3) с $m = 21$ от радиуса цилиндра R

в длинах волн для двух разных показателей преломления цилиндра: для плавленого кварца $n = 1,46$ (рис. 2а) и для полиэстера $n = 1,59$ (рис. 2б). Первый и самый большой из всех максимумов и будет соответствовать резонансному значению радиуса цилиндра: $R_{21} = 2,707071\lambda$ (рис. 2а) и $R_{21} = 2,502264\lambda$ (рис. 2б). Заметим, что для всех первых максимумов коэффициентов $|b_m|$ соблюдается соотношение:

$$\frac{y_{m,1}}{2\pi n} < \frac{R_m}{\lambda} < \frac{j_{m,1}}{2\pi n}, \quad Y_m(y_{m,1}) = 0, \quad J_m(j_{m,1}) = 0, \tag{4}$$

где R_m – радиус первого максимума для m -й моды, $y_{m,1}$ – первый ноль функции Бесселя второго рода (функции Неймана) порядка m , а $j_{1,m}$ – первый ноль функции Бесселя первого рода порядка m . На рис. 2а, б граничные значения неравенства (4) обозначены вертикальными пунктирными линиями.

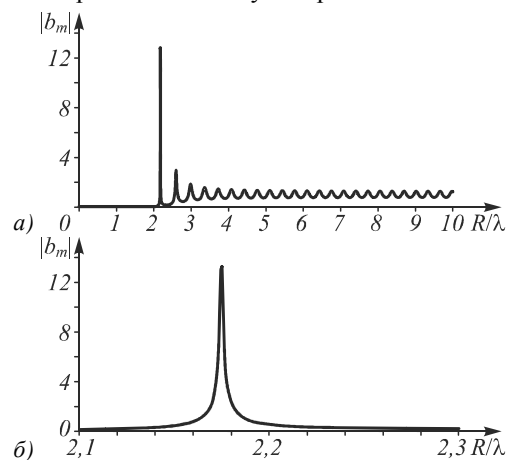


Рис. 1. Зависимость $|b_m|$ от R при $m = 18$, $0\lambda \leq R \leq 10\lambda$ (а), $2,1\lambda \leq R \leq 2,3\lambda$ (б)

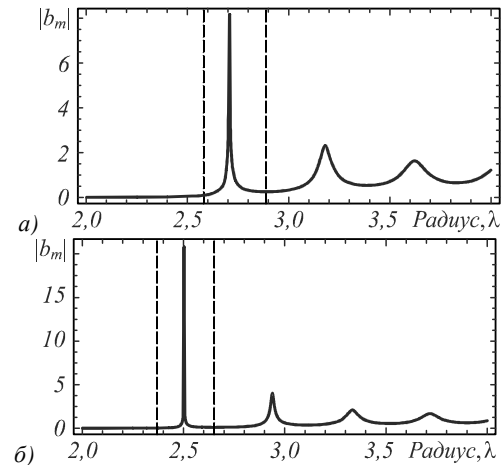


Рис. 2. Значения коэффициента (4) в зависимости от радиуса для диэлектрического цилиндра от показателем преломления: 1,46 (кварцевое стекло) (а) и 1,59 (полиэстер) (б)

Из рис. 2 также следует, что с ростом показателя преломления цилиндра величина модуля коэффициента растёт, а ширина резонансной кривой уменьшается. Так как по оси абсцисс на рис. 1 и 2 радиусы отложены в длинах волн, то графики на этих рисунках можно также рассматривать как спектральные резо-

нансные кривые, а отношение радиуса к ширине резонансной кривой можно рассматривать как добротность резонанса: $Q = R/\Delta R$. Для случая на рис. 1 $Q = 724$. Далее в работе все расчёты будут сделаны для показателя преломления 1,59.

2. Расчёт резонансного радиуса микроцилиндра с помощью уравнения

Покажем, что знаменатель в формуле (2) не может быть равен нулю. Физически это означает, что внутри цилиндра, при его освещении плоской волной, кроме моды ШГ, будет также свет, проходящий через цилиндр. Действительно, рассмотрим знаменатель в (2):

$$Z(R) = J_m(nx)H_m^{(1)'}(x) - nJ_m'(nx)H_m^{(1)}(x). \tag{5}$$

С помощью известных рекуррентных соотношений для цилиндрических функций [21]:

$$xJ_m'(x) = mJ_m(x) - xJ_{m+1}(x) = -mJ_m(x) + xJ_{m-1}(x), \tag{6}$$

и с помощью представления функции Ханкеля через функции Бесселя и Неймана

$$H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + iY_m(x), \tag{7}$$

знаменатель (5) можно преобразовать к виду:

$$Z(R) = [nJ_{m+1}(nx)J_m(x) - J_m(nx)J_{m+1}(x)] + i[nJ_{m+1}(nx)Y_m(x) - J_m(nx)Y_{m+1}(x)]. \tag{8}$$

Приравняем к нулю реальную и мнимую части уравнения (8), получим

$$\begin{cases} nJ_{m+1}(nx)J_m(x) = J_m(nx)J_{m+1}(x), \\ nJ_{m+1}(nx)Y_m(x) = J_m(nx)Y_{m+1}(x). \end{cases} \tag{9}$$

Поделив друг на друга оба равенства в (9), получим равенство

$$\frac{J_m(x)}{Y_m(x)} = \frac{J_{m+1}(x)}{Y_{m+1}(x)}. \tag{10}$$

Но равенство (10) неверное, так как известно выражение [22]:

$$J_{m+1}(x)Y_m(x) - J_m(x)Y_{m+1}(x) = 2/\pi x. \tag{11}$$

Из (11) следует, что одновременно оба равенства в (9) выполняться не могут. Хотя при больших значениях аргумента $x = kR$ (при больших радиусах цилиндра), оба равенства (9) будут выполняться при одном и том же радиусе R . Предположим, что равенство нулю мнимой части выражения (8) даёт уравнение для расчёта резонансного радиуса цилиндра, то есть радиуса, при котором в цилиндре возбуждается мода ШГ

$$g(x) = J_m(nx)Y_m'(x) - nJ_m'(nx)Y_m(x) = nJ_{m+1}(nx)Y_m(x) - J_m(nx)Y_{m+1}(x) = 0. \tag{12}$$

Заметим, что в [12] приведено уравнение для расчёта мод ШГ внутри диэлектрической сферы радиуса R , которое почти совпадёт с первым уравнением в (12). Для сферы вместо номера m в (12) следует использовать $l + 1/2$, где l – номер сферической гармоники, описывающей угловое распределение поля внутри сферы.

Аналитически решить уравнение (12) не удалось, поэтому найдём его решения численно для некоторых номеров коэффициентов в (2). В табл. 1 приведены вычисленные по формулам (3) и (12) значения радиусов цилиндра, при которых возбуждаются моды ШГ разных порядков от 5 до 30. Также в табл. 1 (правый столбец) показаны резонансные радиусы (для некоторых номеров m), рассчитанные по приближённой формуле, следующей из неравенства (4)

$$R_m = \frac{(j_{m,1} + y_{m,1})}{4\pi n} \lambda. \tag{13}$$

Табл. 1. Сравнение трёх методов расчёта резонансных радиусов цилиндра

m	Радиус цилиндра R в длинах волн, при котором достигается максимум модуля коэффициента $ b_m $	Радиус цилиндра R в длинах волн, при котором достигается ноль функции (12) $g(x)$	Радиус цилиндра R в длинах волн, рассчитанный по формуле (13)
5	0,7042456	0,7151557	0,7766895
10	1,2814685	1,2822363	1,3315177
14	1,7325837	1,7326516	1,7644193
15	1,8439363	1,8439715	1,8717318
18	2,1749869	2,1749915	2,1920418
20	2,3935336	2,3935346	2,4044558
22	2,6106762	2,6106768	2,6161310
25	2,9342572	2,9342572	2,9324786
26	3,0416402	3,0416402	3,0376571
30	3,4692394631	3,4692394634	3,4572221

Из табл. 1 видно, что с ростом номера коэффициента разложения (2) или номера моды ШГ m значения резонансных радиусов во втором и третьем столбцах всё больше совпадают между собой. Например, для $m = 30$ в обоих столбцах совпадают по 10 значащих цифр, для $m = 26$ совпадает только 8 значащих цифр, а для $m = 18$ совпадают только первые 5 цифр. Заметим также, что ноль мнимой части (8) достигается при значениях радиусов немного больших, чем точные значения резонансных радиусов. Реальная часть выражения (8) будет давать другие значения радиусов цилиндра, которые будут сильнее отличаться от точных радиусов (мнимая часть даёт более близкие к точным радиусы), но разница между этими значениями будет сокращаться при увеличении номера m . Физически это означает, что с ростом радиуса цилиндра растёт добротность резонанса и увеличивается запасённая энергия моды ШГ, которая становится гораздо больше, чем энергия проходящего через цилиндр света.

Аналитическая оценка радиуса по формуле (13) даёт правильно только первые 2 цифры.

Для аналитической оценки резонансного радиуса цилиндра можно использовать ещё следующие приближённые формулы:

$$R_{m1} = (j_{m-1,1}/2\pi n) \cdot \lambda, \tag{14}$$

$$R_{m2} = (m - 1 + 1,8558(m - 1)^{1/3}/2\pi n) \cdot \lambda, \tag{15}$$

где $J_{m-1}(j_{m-1,1})=0$. Уравнение (14) основано на неравенстве (4) и неравенстве для корней функций Бесселя и Неймана: $y_{m,1} < j_{m-1,1} < j_{m,1}$, а уравнение (15) – это уравнение (14), в котором значение корня функции Бесселя заменено на его приближённое выражение для больших m . В табл. 2 показано сравнение резонансных радиусов для некоторых номеров m , полученных из условия максимума коэффициентов в (3) и по приближённым формулам (14) и (15). Из табл. 2 видно, что формула (14) даёт значение резонансного радиуса цилиндра с ошибкой меньше 5%. Причём с увеличением номера моды m эта ошибка (четвёртый столбец табл. 2) уменьшается. Однако, как было замечено выше, при изменении радиуса цилиндра всего на доли процента, мода ШГ уже не будет возбуждаться. Поэтому применение формулы (15) предпочтительнее. Например, для $m=18$ ошибка в радиусе составляет 0,2%, при $m=26$ – 0,13% (ошибка между значениями во втором и пятом столбцах табл. 2). То есть формула (15) даёт правильно 3 первых значащих цифры резонансного радиуса цилиндра.

Табл. 2. Сравнение резонансных радиусов, полученных разными методами

Порядок функции Бесселя m	Радиус в длинах волн, при котором коэффициент $ b_j _{\text{макс}}$ максимален	R_{m1}/λ Радиус, рассчитанный по формуле (14)	Отклонение $(R_{m1}-R_{m2})/R_{m1} \times 100\%$	R_{m2}/λ Радиус, рассчитанный по формуле (15)
10	1,2814685	1,3367314	4,31	1,2872752
14	1,7325837	1,7818782	2,85	1,7380527
18	2,1749869	2,2194102	2,04	2,1793001
22	2,6106762	2,6519466	1,58	2,6145465
26	3,0416402	3,0809033	1,29	3,0456042

3. Расчёт резонансного радиуса с помощью дисперсионного соотношения для мод диэлектрического стержня

Дисперсионное уравнение для пространственных мод диэлектрического стержня хорошо известно [23]

$$\left[\frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{wK_m(w)} \right] \left[\frac{n^2 J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{wK_m(w)} \right] = m^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left(\frac{n^2}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right), \quad (16)$$

где $K_m(x)$ – функция Макдональда, параметры u и w выражаются через физические переменные

$$u = R\sqrt{(kn)^2 - \beta^2}, \quad w = R\sqrt{\beta^2 - k^2}, \quad (17)$$

где β – постоянная распространения моды волновода, R – радиус стержня или цилиндра. В (16) и (17) предполагается, что снаружи диэлектрического стержня с круглым сечением радиуса R и показателем преломления n находится среда с показателем преломления 1.

Так как в нашем случае вектор электрического поля, падающего и дифрагирующего на цилиндре излучения, направлен вдоль оптической оси цилиндра (ТЕ-поляризация), проекция волнового вектора моды на оптическую ось (постоянная распространения) должна быть равна нулю ($\beta = 0$). В этом случае мода не распространяется вдоль оси волновода, а только вращается вокруг этой оси. Так как $\beta = 0 < k$, то есть параметр моды меньше частоты отсечки, то такая мода является вытекающей. При условии $\beta = 0$ из (17) получим: $u = knR$, $w = ikR$. Подставляя эти параметры в (16), получим в правой части ноль. В этом случае дисперсионное уравнение (16) распадается на два уравнения, когда левый сомножитель в квадратных скобках в (16) равен нулю (ТМ-поляризация) и правый сомножитель в квадратных скобках в (16) тоже равен нулю (ТЕ-поляризация). Значит, уравнение для нахождения резонансных радиусов диэлектрического цилиндра, то есть радиусов, при которых для данной длины волны в цилиндре возбуждаются моды ШГ с ТЕ-поляризацией, не распространяющиеся вдоль оси цилиндра, имеет вид:

$$\frac{nJ'_m(knR)}{J_m(knR)} - \frac{iK'_m(ikR)}{K_m(ikR)} = 0. \quad (18)$$

Используя рекуррентные соотношения, аналогичные (6), и связь функции Макдональда с функциями Бесселя и Неймана [22]:

$$K_m(ix) = \frac{\pi}{2} i^{m+1} H_m^{(1)}(-x) = \frac{\pi}{2} i^{m+1} (-1)^m [J_m(x) + iY_m(x)], \quad (19)$$

получим уравнение для нахождения резонансного радиуса цилиндра:

$$[nJ_{m+1}(nkR)J_m(kR) - J_m(nkR)J_{m+1}(kR)] + i[nJ_{m+1}(nkR)Y_m(kR) - J_m(nkR)Y_{m+1}(kR)] = 0. \quad (20)$$

Уравнение (20) совпадает с (9), которое следует из (8). Как и для (9), можно показать, что одновременно реальная и мнимая части в (20) не могут быть равны нулю (то есть они равны нулю при разных значениях радиуса R). Возникает вопрос: какое из двух уравнений (9) нужно использовать для расчёта резонансных радиусов цилиндров? Причина такой неоднозначности в том, что постоянная распространения моды ШГ меньше частоты отсечки $\beta = 0 < k$. Если постоянная распространения моды в волноводе больше частоты отсечки $\beta > k$, то уравнение (16) состоит из действительных функций. Если же постоянная моды меньше частоты отсечки $\beta < k$, то функции Макдональда становятся комплексными, и вместо одного действительного уравнения (16) возникает система из двух уравнений для действительной и мнимой частей. Решение этой системы относительно постоянной распространения моды даёт комплексные значения постоянной распространения β . Мнимая часть β характеризует скорость вытекания данной моды из волновода. Но для моды ШГ, которая не распространяется

вдоль оси волновода, мнимая часть β тоже равна нулю, как и действительная часть. Возникает неопределённость: имеется два уравнения (20) для реальной и мнимой частей, а решением должно быть одно действительное число R . Поэтому ответ на вопрос, какое из двух уравнений (9) нужно брать для расчёта резонансных радиусов, такой: при небольших значениях kR оба уравнения (9) дают только приближённые значения резонансного радиуса. Но, как показали расчёты (табл. 1), мнимая часть равенства (20) даёт более точные значения резонансных радиусов, чем действительная часть. И чем больше значение kR (или номер m моды ШГ), тем точнее оба уравнения (9) будут давать значения резонансного радиуса. Например, из табл. 1 следует, что для $m = 26$ второе из уравнений (9) правильно определяет 8 значащих цифр резонансного радиуса $R_{26} = 3,0416402\lambda$.

4. Зависимости ширины и глубины фокуса и максимальной интенсивности в фокусе от величины резонансного радиуса цилиндра

В этом разделе приведены результаты численного моделирования дифракции плоской ТЕ-поляризованной волны на диэлектрическом цилиндре ($n = 1,59$) для разных номеров мод ШГ m в диапазоне от 3 до 30, полученные с помощью суммирования конечного числа членов ряда (1), описывающего аналитическое решение данной задачи. На рис. 3 показана максимальная интенсивность $\eta = I_{\max}$ сразу за поверхностью цилиндра. Хотя фокус возникает внутри цилиндра, но из-за его недоступности для применения максимальная интенсивность рассчитывалась снаружи цилиндра в непосредственной близости от его поверхности. Понятно, что разным модам на рис. 3 соответствуют разные радиусы цилиндров, которые меняются от $R_3 = 0,468019\lambda$ до $R_{30} = 3,469239\lambda$.

Из рис. 3 видно, что с ростом резонансного радиуса цилиндра растёт и максимальная интенсивность в фокусе. Для $m = 29$ ($R_{29} = 3,362602\lambda$) максимальная интенсивность в 1000 раз превосходит интенсивность падающего на цилиндр света. Рост максимальной интенсивности в фокусе на рис. 3 нелинейный, и его нельзя объяснить линейным увеличением радиуса цилиндра: чем больше радиус цилиндра, на который падает плоская волна, тем больше света будет собираться в фокусе. Причина экспоненциального роста максимальной интенсивности в фокусе связана с ростом добротности резонанса мод ШГ с увеличением радиуса цилиндра. Увеличение добротности резонанса означает увеличение времени жизни моды ШГ внутри цилиндра. Время жизни моды ШГ внутри цилиндра увеличивается потому, что мода распространяется вдоль менее изогнутой поверхности, и значит, меньше вытекает из цилиндра (в пределе, если цилиндр имеет бесконечный радиус, то мода будет распространяться вдоль плоской поверхности и не будет вытекать из цилиндра). Поэтому запасённая энергия моды ШГ внутри цилиндра растёт с ростом его радиуса. Эта энергия распределяется между лепестками

моды ШГ, один из которых и формирует фокус. Процесс накопления энергии W в цилиндре можно описать уравнением:

$$\frac{dW}{dt} = \alpha - \beta W, \tag{21}$$

которое означает, что увеличение энергии в цилиндре в единицу времени t зависит от постоянного притока энергии (α – постоянная, которая описывает долю световой мощности или интенсивности, от падающего на цилиндр света, которая переходит в моду ШГ) и от потерь энергии βW из-за распространения моды ШГ по кривой траектории поверхности цилиндра. Решение уравнения (21) имеет вид

$$W(t) = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t}). \tag{22}$$

Из (22) следует, что энергия W моды ШГ в цилиндре растёт со временем от нуля до стационарного значения, равного $W_0 = \alpha/\beta$ (при $t \rightarrow \infty$). Доля мощности, остающаяся внутри цилиндра, пропорциональна его радиусу $\alpha = \alpha_0 R$, так как с ростом радиуса цилиндра линейно увеличивается длина «контакта» между скользящими лучами падающего излучения и поверхностью цилиндра (именно скользящие по поверхности лучи формируют моду ШГ). А доля мощности, которая «вытекает» из цилиндра при распространении моды ШГ по кривой его поверхности, зависит от радиуса экспоненциально [24]: $\beta = \beta_0 \exp(-\beta_1 R)$. Поэтому стационарное значение мощности моды ШГ будет зависеть от радиуса экспоненциальным образом

$$W_0 = \alpha_0 \beta_0^{-1} R e^{\beta_1 R}. \tag{23}$$

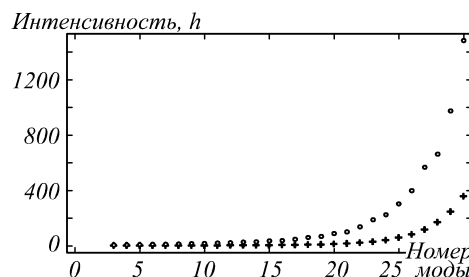


Рис. 3. Максимальная интенсивность в фокусе в непосредственной близости за поверхностью цилиндра из полиэстера ($n = 1,59$) (кружочки) для разных радиусов и квадрат модуля только одного резонансного слагаемого в (1) (крестики)

Уравнение (23) качественно описывает верхний график на рис. 3 (из кружочков). А нижний график на рис. 3 (из крестиков) показывает, как зависит квадрат модуля только одного резонансного слагаемого в ряду (1) в фокусе от номера моды (или резонансного радиуса). Разница между кривыми на рис. 3 показывает, что в формировании поля внутри цилиндра и на его поверхности вносят вклад все слагаемые ряда с номерами, меньшими номера моды m . И чем больше номер моды m , тем больше слагаемых дают вклад в интенсивность на поверхности, тем больше сама интенсивность.

На рис. 4 показана глубина фокуса в зависимости от номера моды ШГ, возбуждаемой при этом внутри цилиндра. Глубина фокуса (DOF) рассчитывалась как расстояние вдоль оптической оси от поверхности цилиндра до точки полуспада интенсивности света. Из рис. 4 видно, что DOF с ростом радиуса цилиндра убывает от $0,3\lambda$ ($m = 3$) до $0,05\lambda$ ($m = 30$).

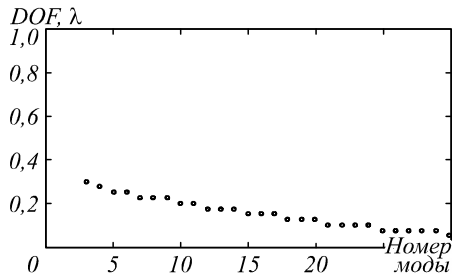


Рис. 4. Глубина фокуса для различных мод Бесселя цилиндра из полиэстера

Такая небольшая глубина резкости означает, что фокус формируется в основном поверхностной волной, которая в данном случае является стоячей поверхностной волной, сформированной интерференцией двух одинаковых мод ШГ, «бегущих» навстречу друг другу вдоль поверхности цилиндра против и по часовой стрелке. Уменьшение DOF с ростом радиуса цилиндра объясняется «втягиванием» фокуса внутрь цилиндра. Действительно, фокус на оптической оси вблизи поверхности цилиндра с противоположной стороны по отношению к падающему свету формируется в результате интерференции двух волн: проходящей через цилиндр и фокусируемой цилиндром волны и поверхностной волной, которая является модой ШГ. Соотношение складывающихся в фокусе интенсивностей этих двух волн разное и зависит от радиуса цилиндра. Интенсивность моды ШГ – это отношение энергии (или мощности), запасённой в моде ШГ, к площади лепестка моды, умноженной на число лепестков, укладываемых на окружности круглого сечения цилиндра. Полная энергия моды ШГ (22) формируется в течение времени в несколько пикосекунд [11] и определяется двумя процессами: пополнением энергии за счёт падающего на цилиндр света и расходом энергии за счёт «вытекания» моды ШГ из цилиндра. Вытекание пропорционально накопленной энергии и обратно пропорционально радиусу цилиндра. Поэтому при относительно больших радиусах цилиндра вклад интенсивности моды ШГ в фокус будет много больше, чем вклад интенсивности сфокусированной волны, которая пропорциональна радиусу цилиндра. Кроме разных по интенсивности вкладов двух волн в фокусный объём, имеется также пространственное разделение вдоль оси максимумов интенсивности этих волн: мода ШГ формируется вблизи поверхности цилиндра, но внутри цилиндра, а проходящая через цилиндр волна фокусируется, наоборот, вблизи цилиндра, но снаружи его. С ростом радиуса цилиндра «наружный» фокус формируется всё дальше от поверхности цилиндра, увеличивается по размеру и уменьшается по интенсивности. А лепесток

моды ШГ, который даёт вклад в фокус и расположен внутри цилиндра, с ростом радиуса цилиндра почти не увеличивается (так как площадь лепестка моды ШГ зависит только от длины волны и показателя преломления) и не выходит за пределы поверхности дальше, чем на длину волны.

На рис. 5 показана ширина фокуса по полуспаду интенсивности (FWHM) сразу за поверхностью цилиндра для разных номеров мод ШГ, которые возбуждаются внутри цилиндра, если цилиндр имеет круглое сечение с резонансным радиусом. Из рис. 5 видно, что ширина фокуса в среднем убывает с ростом номера моды m и величины резонансного радиуса R_m . Минимальная ширина фокуса достигается при $m = 26$ и $m = 30$ и равна $FWHM = 0,15\lambda$, хотя боковые лепестки при этом достигают 70% от максимального значения интенсивности. На рис. 6 показано распределение интенсивности (негатив), рассчитанное с помощью ряда (1) при дифракции плоской волны с ТЕ-поляризацией на цилиндре с резонансным радиусом $R_{30} = 3,469239\lambda$ и показателем преломления $n = 1,59$.

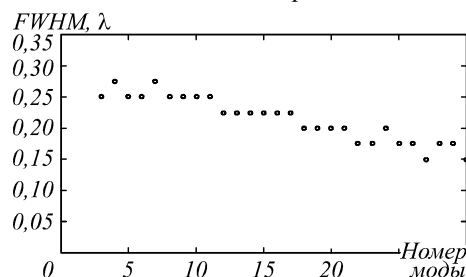


Рис. 5. Ширина фокуса по полуспаду интенсивности сразу за поверхностью цилиндра из полиэстера

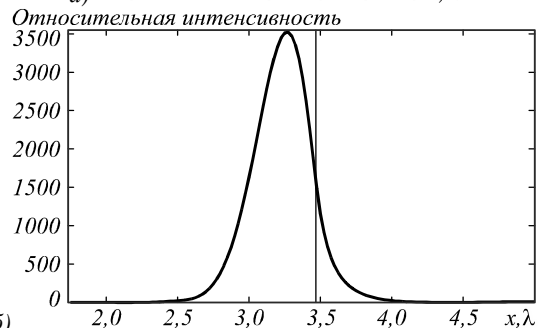
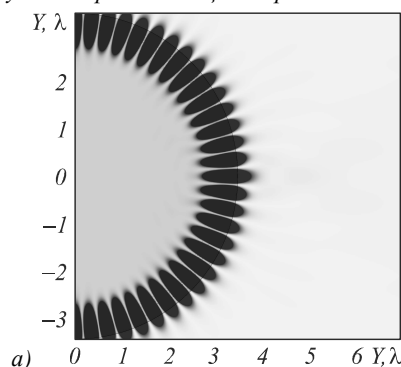


Рис. 6. Двумерное распределение интенсивности (негатив) (а), полученное для радиуса $R_{30} = 3,469239\lambda$ в цилиндре из полиэстера, и продольное (осевое) сечение (б) этой интенсивности. Вертикальная линия показывает границу цилиндра

Из рис. 6б видно, что внутри цилиндра интенсивность в 3500 раз больше интенсивности падающего света, хотя вне цилиндра (сразу за его границей) интенсивность только в 1500 раз больше интенсивности падающего света. Из рис. 6 также видно, что фокус для данного радиуса формируется только модой ШГ.

Заключение

Получены следующие результаты. Показано, что резонансный радиус, при котором возбуждается мода шепчущей галереи с номером m в диэлектрическом цилиндре при освещении его плоской волной с ТЕ-поляризацией, рассчитывается как первый максимум модуля коэффициента с номером m в ряду из цилиндрических функций, который точно решает задачу дифракции плоской волны на диэлектрическом цилиндре. Получено уравнение из цилиндрических функций, которое даёт приближённые значения резонансных радиусов цилиндра, при которых возбуждаются моды шепчущей галереи. Для мод с номерами $m > 26$ это уравнение точно определяет более 8 значащих цифр значения резонансного радиуса цилиндра. Получены приближённые явные выражения для расчёта резонансного радиуса цилиндра, которые точно определяют 2 или 3 первых цифры значения радиуса. Показано, что уравнение для расчёта радиуса цилиндра, при котором возбуждаются моды шепчущей галереи, совпадает с дисперсионным уравнением для моды с ТЕ-поляризацией диэлектрического стержня с нулевой константой распространения. Численно получены первые 30 резонансных радиусов в длинах волн для цилиндра из полиэстера. Показано, что максимальная интенсивность в фокусе снаружи цилиндра растёт экспоненциально с ростом резонансного радиуса, а ширина фокуса и его глубина по полуспаду интенсивности медленно убывают с ростом резонансного радиуса. Например, для цилиндра с показателем преломления 1,59 и резонансным радиусом 3,469239 от длины волны в цилиндре возбуждается мода шепчущей галереи с номером 30, которая формирует фокусное пятно снаружи цилиндра шириной 0,15 от длины волны с максимальной интенсивностью в 1500 раз большей, чем интенсивность падающего света.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-3970.2014.9) и молодого учёного кандидата наук МК-4816.2014.2, а также грантов РФФИ 13-07-97008, 14-29-07133, 14-07-31218 и 15-07-01174.

Литература

- Geints, Y.E. Photonic nanojet calculations in layered radially in homogeneous micrometer-sized spherical particles / Y.E. Geints, A.A. Zemlyanov, E.K. Panina // Journal of the Optical Society of America B. – 2011. – Vol. 28(8). – P. 1825-1830.
- Han, L. Photonic jet generated by spheroidal particle with Gaussian-beam illumination / L. Han, Y. Han, G. Gouesbet, J. Wang, G. Grehan // Journal of the Optical Society of America B. – 2014. – Vol. 31(7). – P. 1476-1483.
- Grojo, D. Bessel-like photonic nanojets from core-shell sub-wavelength spheres / D. Grojo, N. Sandeau, L. Boarino, C. Constantinescu, N. de Leo, M. Laus, K. Sparnacci // Optics Letters. – 2014. – Vol. 39(13). – P. 3989-3992.
- Shen, Y. Ultralong photonic nanojet formed by a two-layer dielectric microsphere / Y. Shen, L.V. Wang, J. Shen // Optics Letters. – 2014. – Vol. 39(14). – P. 4120-4123.
- Gu, G. Super-long photonic nanojet generated from liquid-filled hollow microcylinder / G. Gu, R. Zhou, Z. Chen, H. Xu, G. Cai, M. Hong // Optics Letters. – 2015. – Vol. 40(4). – P. 625-628.
- Liu, C. Photonic nanojet modulation by elliptical microcylinders / C. Liu, L. Chang // Optik. – 2014. – Vol. 125(15). – P. 4043-4046.
- Xu, B.B. Annular focusing lens based on transformation optics / B.B. Xu, W.X. Jiang, G.X. Yu, T.J. Cui // Journal of Optical Society of America A. – 2014. – Vol. 31(5). – P. 1135-1140.
- Heifetz, A. Subdiffraction optical resolution of a gold nanosphere located within the nanojet of a Mie-resonant dielectric microsphere / A. Heifetz, J.J. Simpson, S.C. Kong, A. Taflove, V. Backman // Optics Express. – 2007. – Vol. 15(25). – P. 17334-17342.
- Geints, Y.E. Photonic jets from resonantly excited transparent dielectric microspheres / Y.E. Geints, A.A. Zemlyanov, E.K. Panina // Journal of Optical Society of America B. – 2012. – Vol. 29(4). – P. 758-762.
- Козлов, Д.А. Резонансная фокусировка лазерного света однородным диэлектрическим цилиндром / Д.А. Козлов, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 3. – С. 393-396.
- Козлова, Е.С. Моделирование резонансной фокусировки пикосекундного импульса диэлектрическим микроцилиндром / Е.С. Козлова, В.В. Котляр, С.А. Дегтярев. // Компьютерная оптика. – 2015. – Т. 39, № 1. – С. 45-51.
- Righini, G.C. Whispering gallery mode microresonators: Fundamentals and applications / G.C. Righini, Y. Dumeige, P. Feron, M. Ferrari, G.N. Conti, D. Ristic, S. Soria // La Rivista del Nuovo Cimento. – 2011. – Vol. 34(7). – P. 435-490.
- Rayleigh, L. The Problem of the Whispering Gallery / L. Rayleigh // Philosophical Magazine. – 1910. – Vol. 20. – P. 1001-1004.
- Chiasera, A. Spherical whispering-gallery-mode microresonators / A. Chiasera, Y. Dumeige, P. Féron, M. Ferrari, Y. Jestin, G.N. Conti, S. Pelli, S. Soria, G.C. Righini // Laser and Photonics Reviews. – 2010. – Vol. 4(3). – P. 457-482.
- Gorodetsky, M.L. Ultimate Q of optical microsphere resonators / M.L. Gorodetsky, A.A. Savchenkov, V.S. Ilchenko // Optics Letters. – 1996. – Vol. 21(7). – P. 453-455.
- Gorodetsky, M.L. Geometrical theory of whispering-gallery modes / M.L. Gorodetsky, A.E. Fomin // IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics. – 2006. – Vol. 12. – P. 33-39.
- Armani, D.K. Ultra-high-Q toroid microcavity on a chip / D.K. Armani, T.J. Kippenberg, S.M. Spillane, K.J. Vahala // Nature. – 2003. – Vol. 421. – P. 925-928.
- Borselli, M. Rayleigh scattering, mode coupling, and optical loss in silicon microdisks / M. Borselli, K. Srinivasan, P.E. Barclay, O. Painter // Applied Physics Letters. – 2004. – Vol. 85(17). – P. 3693-3695.
- Birks, T.A. High-resolution measurement of the fiber diameter variations using whispering gallery modes and no optical alignment // T.A. Birks, J.C. Knight, T.E. Dimmick // IEEE Photonics Technology Letters. – 2000. – Vol. 12. – P. 182-183.
- Ваганов, В.Р. Основы теории дифракции / В.Р. Ваганов, Б.З. Каценеленбаум. – М.: Наука, 1983. – 325 с.
- Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. – М.: Наука, 1979.

22. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983.
 23. **Cherin, A.N.** An introduction to optical fiber. – Singapore: McGraw-Hill Inc., 1987.
 24. **Khan, I.** Bending loss analysis of optical waveguide for SOI & SOS material system towards photonic integration / I. Khan, M.M. Rahman // Proceedings of 4th Global Engineering, Science and Technology Conference. – 2013.
- References**
1. **Geints, Y.E.** Photonic nanojet calculations in layered radially in homogeneous micrometer-sized spherical particles / Y.E. Geints, A.A. Zemlyanov, E.K. Panina // Journal of the Optical Society of America B. – 2011. – Vol. 28(8). – P. 1825-1830.
 2. **Han, L.** Photonic jet generated by spheroidal particle with Gaussian-beam illumination / L. Han, Y. Han, G. Gouesbet, J. Wang, G. Grehan // Journal of the Optical Society of America B. – 2014. – Vol. 31(7). – P. 1476-1483.
 3. **Grojo, D.** Bessel-like photonic nanojets from core-shell sub-wavelength spheres / D. Grojo, N. Sandeau, L. Boarino, C. Constantinescu, N. de Leo, M. Laus, K. Sparnacci // Optics Letters. – 2014. – Vol. 39(13). – P. 3989-3992.
 4. **Shen, Y.** Ultralong photonic nanojet formed by a two-layer dielectric microsphere / Y. Shen, L.V. Wang, J. Shen // Optics Letters. – 2014. – Vol. 39(14). – P. 4120-4123.
 5. **Gu, G.** Super-long photonic nanojet generated from liquid-filled hollow microcylinder / G. Gu, R. Zhou, Z. Chen, H. Xu, G. Cai, M. Hong // Optics Letters. – 2015. – Vol. 40(4). – P. 625-628.
 6. **Liu, C.** Photonic nanojet modulation by elliptical microcylinders / C. Liu, L. Chang // Optik. – 2014. – Vol. 125(15). – P. 4043-4046.
 7. **Xu, B.B.** Annular focusing lens based on transformation optics / B.B. Xu, W.X. Jiang, G.X. Yu, T.J. Cui // Journal of Optical Society of America A. – 2014. – Vol. 31(5). – P. 1135-1140.
 8. **Heifetz, A.** Subdiffraction optical resolution of a gold nanosphere located within the nanojet of a Mie-resonant dielectric microsphere / A. Heifetz, J.J. Simpson, S.C. Kong, A. Taflove, V. Backman // Optics Express. – 2007. – Vol. 15(25). – P. 17334-17342.
 9. **Geints, Y.E.** Photonic jets from resonantly excited transparent dielectric microspheres / Y.E. Geints, A.A. Zemlyanov, E.K. Panina // Journal of Optical Society of America B. – 2012. – Vol. 29(4). – P. 758-762.
 10. **Kozlov, D.A.** Resonant laser focus light by uniformity dielectric microcylinder / D.A. Kozlov, V.V. Kotlyar // Computer Optics. – 2014. – Vol. 38(3). – P. 393-396.
 11. **Kozlova, E.S.** Simulation of resonance focusing of a picosecond pulse by a dielectric microcylinder / E.S. Kozlova, V.V. Kotlyar, S.A. Degtyarev // Computer Optics. – 2015. – Vol. 39(1). – P. 45-51.
 12. **Righini, G.C.** Whispering gallery mode microresonators: Fundamentals and applications / G.C. Righini, Y. Dumeige, P. Feron, M. Ferrari, G.N. Conti, D. Ristic, S. Soria // La Rivista del Nuovo Cimento. – 2011. – Vol. 34(7). – P. 435-490.
 13. **Rayleigh, L.** The Problem of the Whispering Gallery / L. Rayleigh // Philosophical Magazine. – 1910. – Vol. 20. – P. 1001-1004.
 14. **Chiasera, A.** Spherical whispering-gallery-mode microresonators / A. Chiasera, Y. Dumeige, P. Féron, M. Ferrari, Y. Jestin, G.N. Conti, S. Pelli, S. Soria, G.C. Righini // Laser and Photonics Reviews. – 2010. – Vol. 4(3). – P. 457-482.
 15. **Gorodetsky, M.L.** Ultimate Q of optical microsphere resonators / M.L. Gorodetsky, A.A. Savchenkov, V.S. Ilchenko // Optics Letters. – 1996. – Vol. 21(7). – P. 453-455.
 16. **Gorodetsky, M.L.** Geometrical theory of whispering-gallery modes / M.L. Gorodetsky, A.E. Fomin // IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics. – 2006. – Vol. 12. – P. 33-39.
 17. **Armani, D.K.** Ultra-high-Q toroid microcavity on a chip / D.K. Armani, T.J. Kippenberg, S.M. Spillane, K.J. Vahala // Nature. – 2003. – Vol. 421. – P. 925-928.
 18. **Borselli, M.** Rayleigh scattering, mode coupling, and optical loss in silicon microdisks / M. Borselli, K. Srinivasan, P.E. Barclay, O. Painter // Applied Physics Letters. – 2004. – Vol. 85(17). – P. 3693-3695.
 19. **Birks, T.A.** High-resolution measurement of the fiber diameter variations using whispering gallery modes and no optical alignment // T.A. Birks, J.C. Knight, T.E. Dimmick // IEEE Photonics Technology Letters. – 2000. – Vol. 12. – P. 182-183.
 20. **Vaganov, V.R.** Foundations of the diffraction theory / V.R. Vaganov, B.Z. Katselenbaum. – Moscow: "Nauka" Publisher, 1983. – P. 325. – (In Russian).
 21. **Abramovits, M.** Handbook of Special Functions / edited by M. Abramovits, I. Stigan. – Moscow: "Nauka" Publisher, 1979. – (In Russian).
 22. **Prudnikov, A.P.** Integrals and Series. Special Functions / A.P. Prudnikov., Y.A. Brychkov, O.I. Marychev. – Moscow: "Nauka" Publisher, 1983. – (In Russian).
 23. **Cherin, A.N.** An introduction to optical fiber. – Singapore: McGraw-Hill Inc., 1987.
 24. **Khan, I.** Bending loss analysis of optical waveguide for SOI & SOS material system towards photonic integration / I. Khan, M.M. Rahman // Proceedings of 4th Global Engineering, Science and Technology Conference. – 2013.

CALCULATION OF THE RESONANT RADIUS OF A DIELECTRIC CYLINDER UNDER ILLUMINATION BY A PLANE TE-WAVE

V.V. Kotlyar, D.A. Kozlov, A.A. Kovalev
Image Processing Systems Institute,
Russian Academy of Sciences,
Samara State Aerospace University

Abstract

When a dielectric circular cylinder of specific radius is illuminated by a plane wave, a whispering gallery mode (WGM) is generated in the cylinder. This resonant radius of the cylinder can be derived numerically on the assumption of the maximal value of the coefficient in a Bessel series expansion of the E-field amplitude of the TE-wave. Equations composed of cylinder functions are obtained, allowing the cylinder's resonant radius to be calculated approximately. For instance, based on the equations, one can accurately determine eight initial significant digits of the cylinder resonant radius for a WGM with mode number $N=26$ to be generated. In a cylinder with refrac-

tive index $n = 1.59$ and resonant radius $R = 3.469239\lambda$ (λ is wavelength), a WGM with mode number $N = 30$ is excited. Such a WGM cylinder can generate an external focal spot of size 0.15λ , with its maximal intensity being 1500 times higher than that of incident light.

Keywords: whispering gallery mode (WGM) in a dielectric cylinder, resonant radius of the dielectric microcylinder.

Сведения об авторах

Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского государственного аэрокосмического университета (СГАУ). В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств.

E-mail: kotlyar@smr.ru.

Victor Victorovich Kotlyar is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute (Samara) of the Russian Academy of Sciences and professor of Computer Science department at Samara State Aerospace University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in physics and mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices.

Козлов Дмитрий Андреевич, 1992 года рождения, студент 1-го курса магистратуры по специальности «Прикладные математика и физика» Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва. Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная оптика.

E-mail: kozlov.dmitry.a@gmail.com.

Dmitry Andreevich Kozlov (b. 1992) student in Applied Mathematics and Physics in Samara State Aerospace University. Scientific interests: nanophotonics, diffractive optics.

Ковалёв Алексей Андреевич, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва — СГАУ по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений Института систем обработки изображений РАН. В списке научных работ более 80 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, сингулярная оптика, фотонно-кристаллические устройства.

E-mail: alanko@smr.ru.

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree (2012). He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences (IPSI RAS), holding a part-time position assistant at SSAU's Technical Cybernetics sub-department. He is co-author of more than 80 scientific papers. Research interests are mathematical diffraction theory, singular optics, and photonic crystal devices.

*Поступила в редакцию 11 марта 2015 г.
Окончательный вариант – 25 марта 2015 г.*