

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ФОКУСИРОВКИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКИЕ ОБЛАСТИ В РАМКАХ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

С.И. Харитонов^{1,2}, Л.Л. Досколович^{1,2}, Н.Л. Казанский^{1,2}

¹ Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, Самара, Россия,

² Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия

Аннотация

Предложен метод расчёта функции эйконала светового поля из условия формирования требуемого распределения интенсивности в заданной области фокальной плоскости. Для повышения эффективности решения задачи фокусировки разработана модификация метода согласованных прямоугольников, который обеспечивает расчет дифракционных оптических элементов для фокусировки в плоские области. Новизна состоит в методе восстановления эйкональной функции по известному лучевому соответствию между точками на дифракционных оптических элементах и точками в фокальной плоскости. Представлены результаты фокусировки в ромб. Результаты моделирования показывают высокое качество фокусировки и подтверждают работоспособность предложенного метода.

Ключевые слова: геометрическая оптика, эйкональная функция, фокусировка, метод согласованных прямоугольников, лучевое соответствие.

Цитирование: Харитонов, С.И. Решение обратной задачи фокусировки лазерного излучения в плоские области в рамках геометрической оптики / С.И. Харитонов, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 4. – С. 439-450. – DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-4-439-450.

Введение

Задача расчёта оптического элемента из условия формирования заданного распределения интенсивности в плоской области относится к классу обратных задач математической физики. В случае точечного источника излучения и дифракционного оптического элемента (ДОЭ) на плоской поверхности задача сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка эллиптического типа.

Впервые идея использования голографических оптических элементов, синтезированных на компьютере, была предложена в работе [1]. Теоретической основой этой статьи была работа [2].

Постановка задачи фокусировки лазерного излучения с помощью плоских ДОЭ была рассмотрена в работах [2–3]. В работах [4–5] впервые была поставлена и решена задача фокусировки лазерного излучения в произвольную фокальную кривую с помощью ДОЭ на плоской поверхности. Эти результаты были обобщены в работах [6–8] и до сих пор вызывают интерес ученых [9]. Фокусировка в линию используется для лазерной резки [10–11], маркировки [12], сверления [13], подсветки [14–15]; фокусировка в набор точек – для маркировки и освещения [16–17]. В то же время существует ряд актуальных задач (лазерной технологической обработки [18–20], светотехники [15, 21], медицины [22–23]), для решения которых необходимо сформировать требуемое (чаще всего равномерное) распределение интенсивности света в заданной плоской области. Для формирования такого распределения создано множество методов и оптических элементов [24–47]. В частности, для фокусировки в плоскую область и выравнивания гауссовского пучка были использованы «перемешивающие» дифракционные решетки [24–25, 35], итерационные методы расчета многоуровневых ДОЭ [28, 32, 38, 42], бинарные и голографические оптические элементы [27, 30, 32, 34, 35,

37, 39, 47]. К сожалению, голографические оптические элементы имеют недостаточную энергетическую эффективность, а с помощью бинарных элементов невозможно сфокусировать в несимметричные области (невозможно рассчитать высокоэффективную бинарную призму). Вычислительная сложность итерационных методов резко возрастает с увеличением линейных размеров ДОЭ. Аналитический геометрикооптический подход, основанный на лучевом преобразовании координат [2–9], обеспечивает хорошую эффективность и получил достаточное распространение [29, 33, 36, 40, 41], но ограничен использованием простейших симметричных областей фокусировки.

Приближенные методы решения задачи фокусировки лазерного излучения с помощью ДОЭ рассмотрены в работе [48]. В данной работе используется метод приближенного решения уравнения Монжа – Ампера. Метод основан на сведении решения исходного уравнения к решению нелинейного уравнения в частных производных первого порядка.

Настоящая работа посвящена решению обратной задачи фокусировки в плоские области в рамках геометрической оптики. В работе предложен модифицированный метод, основанный на методе согласованных прямоугольников, изложенном в работе [48]. Новизна состоит в методе восстановления эйкональной функции по известному лучевому соответствию между точками на ДОЭ и точками в фокальной плоскости. Рассмотрены также новые приближенные методы поиска лучевого соответствия для непрямоугольных областей, основанные на решении линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка.

1. Задача фокусировки в двумерную область в декартовых координатах

Дифракционные оптические элементы осуществляют преобразование комплексной амплитуды в плос-

кости, непосредственно прилегающей к ДОЭ, в комплексную амплитуду в области фокусировки. В рамках геометрической оптики каждой точке в фокальной области соответствует одна или несколько точек в плоскости, непосредственно прилегающей к ДОЭ.

Рассмотрим дифракционный оптический элемент, который осуществляет некоторое отображение точек, расположенных в плоскости ДОЭ ($z=0$), в точки фокальной области ($z=f$). Обозначим функции, описывающие данное отображение, в виде

$$x = x(u, v), \tag{1}$$

$$y = y(u, v), \tag{2}$$

где (u, v) – декартовы координаты точек в области F ДОЭ, (x, y) – декартовы координаты в области фокусировки G (см. рис. 1). Отметим, что не любое преобразование координат можно осуществить с использованием ДОЭ. Для того, чтобы данное преобразование было физически реализуемо, необходимо, чтобы существовала эйкональная функция ДОЭ. Эйкональная функция ДОЭ – это функция, описывающая распределение эйконала световой волны в плоскости непосредственно за ДОЭ.

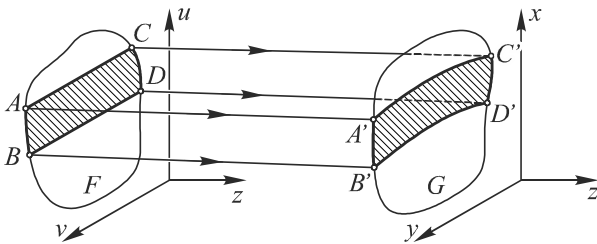


Рис. 1. Постановка задачи фокусировки в двумерную область

Пусть $\varphi(u, v)$ – функция эйконала в плоскости непосредственно за ДОЭ, тогда преобразование координат (1) имеет вид [1–2, 4–9]

$$x(u, v) = u + f \frac{\varphi_u(u, v)}{\sqrt{1 - \varphi_u^2(u, v) - \varphi_v^2(u, v)}}, \tag{3}$$

$$v(u, v) = v + f \frac{\varphi_v(u, v)}{\sqrt{1 - \varphi_u^2(u, v) - \varphi_v^2(u, v)}}.$$

Приведенные выражения получены в результате решения уравнения эйконала в однородной среде и представляют собой решения характеристической системы уравнений, которые соответствуют уравнению эйконала (уравнению в частных производных первого порядка).

Из этих соотношений следует, что, если известны функции, связывающие координаты в области ДОЭ и координаты в фокальной плоскости, то эйкональная функция ДОЭ имеет вид

$$\varphi(u, v) = \int_{\Omega} \frac{(x(\xi, \eta) - \xi)}{L(\xi, \eta)} d\xi + \int_{\Omega} \frac{(y(\xi, \eta) - \eta)}{L(\xi, \eta)} d\eta, \tag{4}$$

$$L(\xi, \eta) = \sqrt{(x(\xi, \eta) - \xi)^2 + (y(\xi, \eta) - \eta)^2 + f^2},$$

ξ, η – переменные интегрирования, интегрирование проводится вдоль некоторого пути Ω , соединяющего точку с координатами u, v с фиксированной точкой в ДОЭ.

Следует отметить, что в общем случае нельзя восстановить эйкональную функцию ДОЭ только по известным функциям $x(u, v), y(u, v)$.

Для корректного восстановления функции должно выполняться условие

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{x(u, v) - u}{L(u, v)} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{y(u, v) - v}{L(u, v)} \right). \tag{5}$$

Данное условие получается из условия равенства смешанных производных эйкональной функции. После преобразования и упрощения условие восстановления эйкональной функции приобретает вид

$$\left(1 - \frac{(x(u, v) - u)^2}{L^2(u, v)} \right) x_v(u, v) - \left(1 - \frac{(y(u, v) - v)^2}{L^2(u, v)} \right) y_u(u, v) - \frac{(y(u, v) - v)(x(u, v) - u)}{L(u, v)L(u, v)} \times (y_v(u, v) - x_u(u, v)) = 0. \tag{6}$$

В рамках асимптотической теории (геометрической оптики) уравнение Гельмгольца, которое описывает распространение поля в рамках скалярной оптики, распадается на уравнение эйконала и уравнение переноса. Уравнение переноса описывает распространение света вдоль световых трубок. Лучевая трубка представляет собой поверхность, которая «сострана» из лучей, которые, в свою очередь, описываются решениями характеристической системы уравнений для уравнения эйконала. Энергия светового поля внутри лучевых трубок сохраняется. Это следует из свойств уравнения переноса. Это позволяет сформулировать закон сохранения энергии вдоль лучевых (световых трубок). Интенсивность в фокальной плоскости и интенсивность освещающего пучка в области ДОЭ связаны соотношением, полученным из закона сохранения светового потока вдоль лучевой трубки:

$$I(x(u, v), y(u, v)) = (I_0(u, v)) / (J(u, v)), \tag{7}$$

$$J(u, v) = (x_u y_v - x_v y_u),$$

где $J(u, v)$ – якобиан лучевого преобразования.

Для того, чтобы воспользоваться выражением (7) для расчёта интенсивности в некоторой точке (x, y) , необходимо определить точку выхода луча. Для определения точки выхода луча нужно обратить лучевое преобразование (1). Обратить лучевое преобразование возможно, если якобиан преобразования не обращается в нуль. На практике существует множе-

ство точек, в которых якобиан преобразования обращается в нуль. Примером могут служить каустики и фокальные точки. Для практического применения перепишем выражение в интегральной форме

$$I(x, y) = \int I_0(u, v) \times \delta(x - x(u, v), y - y(u, v)) du dv. \quad (8)$$

Таким образом, если известны функции, описывающие соответствие между точками на ДОЭ и точками фокальной области, то можно получить выражение для интенсивности в фокальной плоскости. Недостатком подобного интегрального представления является наличие в ядре интегрального преобразования сингулярной функции. На практике сингулярную функцию заменяют ее регулярной аппроксимацией, например, функцией Гаусса. Размер функции Гаусса должен выбираться исходя из размеров фотоэлектрического детектора, который используется при регистрации оптического излучения.

В силу закона сохранения энергии можно представить соотношение (7) в следующей интегральной форме:

$$\iint_F I_0(u, v) du dv = \iint_G I(x, y) dx dy, \quad (9)$$

где F – некоторая область в плоскости (u, v) , а G – образ области F при отображении (1), (2).

В этой форме закон сохранения энергии по лучевым трубкам используется для решения ряда задач фокусировки.

Для приближённого решения прямых и обратных задач дифракции часто используется параксиальное (малоугловое) приближение. Параксиальное приближение можно использовать, если размеры области фокусировки и размер апертуры ДОЭ малы по сравнению с расстоянием от ДОЭ до области фокусировки.

В параксиальном приближении

$$(x(u, v) - u)^2 / L^2(u, v) \ll 1. \quad (10)$$

В этом случае выражение (4) для эйкональной функции ДОЭ принимает вид:

$$\varphi(u, v) = (1/f) \int_{(u_0, v_0)}^{(u, v)} (x(\xi, \eta) - \xi) d\xi + (1/f) \int_{(u_0, v_0)}^{(u, v)} (y(\xi, \eta) - \eta) d\eta. \quad (11)$$

Условие интегрируемости (5) в параксиальном приближении может быть записано в более простой форме:

$$\partial y(u, v) / \partial u = \partial x(u, v) / \partial v. \quad (12)$$

Связь интенсивности в фокальной плоскости и освещающего пучка имеет прежний вид (8).

Приведенные выражения (7), (12) можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений относительно искомым функций $x(u, v)$, $y(u, v)$ при решении обратных задач фокусировки. Решение этих уравнений имеет простой вид в случае, если интен-

сивности освещающего пучка и интенсивность пучка в фокальной области имеет вид [4, 8]

$$I_0(u, v) = I_0(u)I_0(v), \quad I(x, y) = I(x)I(y). \quad (13)$$

В этом случае задача сводится к решению уравнений в обыкновенных производных. Отметим также, что в этом случае условие восстановления эйкональной функции выполняется точно и задача расчета эйкональной функции ДОЭ имеет точное решение [46].

Постановка задачи фокусировки

Пусть имеется ДОЭ с апертурой F , представляющей плоскую двумерную область в плоскости $z = 0$. Распределение интенсивности в области ДОЭ – $I_0(u, v)$. Область фокусировки G представляет собой плоскую двумерную область в плоскости $z = f$. Распределение интенсивности в области фокусировки описывается функцией $I(x, y)$. Требуется найти лучевое соответствие $x(u, v)$, $y(u, v)$ на основе решения уравнений (7), (12). В некоторых случаях апертуру ДОЭ будем представлять в виде фигуры, которая сверху, снизу, справа и слева ограничена кривыми, описываемыми уравнениями $v = f_2(u)$, $v = f_1(u)$, $u = a$, $u = b$. Область фокусировки будем представлять в виде фигуры, которая сверху, снизу, справа и слева ограничена кривыми, описываемыми уравнениями $y = g_2(x)$, $y = g_1(x)$, $x = A$, $x = B$.

2. Аналитические решения задачи фокусировки

С помощью методов, изложенных в работах [3–9], могут быть рассчитаны различные ДОЭ для формирования заданных распределений интенсивности. В некоторых случаях может быть получено аналитическое выражение для эйкональной функции. В дальнейшем полученные аналитические решения будут использованы для нахождения эйкональной функции ДОЭ, формирующих более сложные распределения интенсивности.

2.1. Фокусировка Гауссова пучка в прямоугольник

Рассмотрим фокусировку Гауссова пучка

$$I_0(u, v) = \exp(-u^2/2\sigma_1^2) - \exp(-v^2/2\sigma_2^2)$$

с прямоугольной апертурой $a \times b$ в прямоугольную область $A \times B$ с постоянной интенсивностью $I(x, y) = I$.

В данном случае задача фокусировки разделяется на две одномерные задачи [46] и отображение (1) принимает вид:

$$x = x(u), \quad y = y(v), \quad (14)$$

где

$$x(u) = A \frac{\int_0^u \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_1^2}\right) d\xi}{\int_{-b/2}^{b/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_1^2}\right) d\xi}, \quad (15)$$

$$y(v) = B \frac{\int_0^v \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_2^2}\right) d\xi}{\int_{-b/2}^{b/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_2^2}\right) d\xi}. \quad (16)$$

Согласно (15), эйкональная функция имеет вид:

$$\varphi(u, v) = -((u^2 + v^2)/2f) + (1/f) \int_0^u x(\xi) d\xi + (1/f) \int_0^v y(\xi) d\xi. \quad (17)$$

Функция ДОЭ, осуществляющего фокусировку в прямоугольник, повернутый на угол $\pi/4$, имеет вид:

$$\varphi(u, v) = -(u^2 + v^2)/2f + (1/f) \int_0^{(u+v)/\sqrt{2}} x(\xi) d\xi + (1/f) \int_0^{(u-v)/\sqrt{2}} y(\xi) d\xi. \quad (18)$$

Приведённую функцию можно использовать для решения задачи фокусировки из ограниченного круглого Гауссова пучка в квадрат.

2.2. Фокусировка ограниченного Гауссова пучка в круг

Рассмотрим фокусировку Гауссова пучка $I_0(r) = \exp[-(r^2/2\sigma^2)]$, $r = \sqrt{u^2 + v^2}$, $r \leq R$ в круг с равномерным распределением интенсивности $I(\rho) = I$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\rho \leq \rho_0$. В этом случае в уравнении (8) перейдем к полярным координатам и получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\exp(-r^2/2\sigma^2) r = I \rho (d\rho/dr). \quad (19)$$

Функция лучевого соответствия $\rho = \rho(r)$ имеет вид:

$$\rho^2 = \rho_0^2 [1 - \exp(-r^2/2\sigma^2)] / [1 - \exp(-r^2/2\sigma^2)]. \quad (20)$$

При $\sigma \gg R$ функция лучевого соответствия принимает вид:

$$\rho(r) = (\rho_0/R) r. \quad (21)$$

При этом эйконалная функция имеет вид:

$$\varphi(r) = -(r^2/2f) + (1/f) \int_0^r \rho(\xi) d\xi. \quad (22)$$

Лучевое соответствие в декартовых координатах имеет вид

$$\begin{aligned} x(u, v) &= (u/\sqrt{u^2 + v^2}) \rho(\sqrt{u^2 + v^2}), \\ y(u, v) &= (v/\sqrt{u^2 + v^2}) \rho(\sqrt{u^2 + v^2}), \end{aligned} \quad (23)$$

где $\rho(r)$ имеет вид (20).

Данную функцию далее будем использовать для фокусировки ограниченного круглого Гауссова пучка в квадрат.

3. Поиск лучевых отображений и восстановление эйконалной функции для фокусировки в двумерные области

В предыдущем параграфе были получены дифференциальные уравнения в частных производных, необходимые для постановки и решения обратной задачи фокусировки когерентного излучения с помощью ДОЭ.

Следует отметить, что, несмотря на простоту записи, приведенная система уравнений не имеет аналитического решения. Применение численных мето-

дов для решения также связано с большими вычислительными трудностями.

Обычно нам неизвестно отображение, которое осуществляет ДОЭ. В этом случае в качестве лучевого преобразования будем использовать лучевое преобразование, которое осуществляет фокусировку в область, близкую к требуемой. Например, необходимо сфокусировать круглый пучок с равномерным по сечению распределением интенсивности в прямоугольник также с равномерной интенсивностью, а известно отображение, которое осуществляет фокусировку в эллипс, размеры которого приблизительно совпадают с размерами требуемого прямоугольника.

Другим примером является фокусировка круглого пучка с равномерным распределением интенсивности в квадрат, если известно отображение, которое фокусирует в круг такой же площади, как и квадрат. Отображения легко записываются в аналитическом виде, если эйконалная функция ДОЭ представляет собой сумму двух функций, каждая из которых зависит от своей пространственной координаты или является радиально-симметричной.

В данном параграфе предложен модифицированный метод, улучшающий метод прямоугольников, изложенный в работе [48]. Рассмотрены также метод приближенного поиска лучевого соответствия для непрямоугольных областей на основе отображения с помощью радиальных прямых.

3.1. Поиск лучевого соответствия на основе отображения прямых в кривые

В предыдущих параграфах рассмотрены отображения, которые можно использовать в качестве нулевого приближения.

Во многих случаях отображение строится на основе предположения, что прямые, параллельные оси u в области оптического элемента, отображаются в прямые, которые параллельны оси v в области фокусировки. Это предположение основано на том, что при фокусировке «круга в круг» или «круга в эллипс» это выполняется точно.

Рассмотрим более сложное отображение. Для упрощения рассмотрим случай постоянных интенсивностей в области ДОЭ и в области фокусировки. Пусть известно, что существует ДОЭ, которое осуществляет близкое отображение. Пусть такое отображение задается уравнениями

$$\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v). \end{aligned} \quad (24)$$

Сопоставим этому лучевому отображению семейство линий, покрывающих область фокусировки

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, t), \\ y &= y(\xi, t). \end{aligned} \quad (25)$$

Параметр ξ определяет кривую в данном семействе, t – параметр вдоль кривой.

Пусть также известно, что кривая с параметром ξ пересекает область фокусировки в точках (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , которые определяются параметрами $t_1(\xi)$, $t_2(\xi)$.

$$\begin{aligned}x_1 &= x(\xi, t_1(\xi)), \quad y_1 = y(\xi, t_1(\xi)), \\x_2 &= x(\xi, t_2(\xi)), \quad y_2 = y(\xi, t_2(\xi)).\end{aligned}$$

Найдем теперь энергию, попадающую в область между двумя линиями из данного семейства с параметрами ξ_1 и ξ_2 . Энергия, заключенная в области G_1 , ограниченной областью фокусировки и выбранными кривыми семейства, имеет вид

$$W(\xi_1, \xi_2) = \int_{G_1} I(x, y) dx dy. \quad (26)$$

Для вычисления интеграла сделаем замену переменных интегрирования. Новые криволинейные координаты будут определяться выражениями, которые аналогичны формулам, определяющим исходное отображение

$$\begin{aligned}W(\xi_1, \xi_2) &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{t_1(\xi)}^{t_2(\xi)} I(x(\xi, t), y(\xi, t)) \times \\&\times |x_\xi y_t - y_\xi x_t| d\xi dt.\end{aligned} \quad (27)$$

Выразим теперь энергию, попадающую в область между прямыми $u = u_1$, $u = u_2$

$$W_0(u_1, u_2) = \int_{u_1}^{u_2} dt \int_{f_1(t)}^{f_2(t)} I_0(t, s) ds, \quad (28)$$

где

$$v = f_1(u); \quad v = f_2(u) - \quad (29)$$

уравнения кривых, которые ограничивают апертуру ДОЭ снизу и сверху.

В силу закона сохранения энергии выполняется равенство

$$W(\xi, \xi + d\xi) = W_0(u, u + du). \quad (30)$$

В результате получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}\left(\int_{t_1(\xi)}^{t_2(\xi)} I(x(\xi, t), y(\xi, t)) |x_\xi y_t - y_\xi x_t| dt \right) d\xi = \\= \left(\int_{f_1(u)}^{f_2(u)} I_0(u, s) ds \right) du.\end{aligned} \quad (31)$$

Решением данного уравнения является функция $\xi = \xi(u)$. Это, в свою очередь, означает, что прямая отображается в кривую. Новое лучевое соответствие имеет вид

$$\begin{aligned}x &= x_0(u, v) = x(\xi(u), \eta(u, v)), \\y &= y_0(u, v) = y(\xi(u), \eta(u, v)).\end{aligned} \quad (32)$$

Далее функция $\eta(u, v)$ находится из решения уравнения

$$\begin{aligned}J(u, v) = x_{0u}(u, v) y_{0v}(u, v) - x_{0v}(u, v) y_{0u}(u, v) = \\= (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)(\xi_u \eta_v - \xi_v \eta_u) = (S/S_0).\end{aligned} \quad (33)$$

Упрощаем уравнение и получаем

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \right) \frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{S}{S_0} \left(\frac{\partial x_0}{\partial \xi} \frac{\partial y_0}{\partial \eta} - \frac{\partial x_0}{\partial \eta} \frac{\partial y_0}{\partial \xi} \right)^{-1}. \quad (34)$$

Таким образом, мы получили лучевое соответствие, описывающее отображение отрезков прямых на апертуре в сегменты кривых в области фокусировки. Полученное уравнение относится к типу квазилинейных неоднородных уравнений и интегрируется. Метод интегрирования излагается в учебниках по дифференциальным уравнениям, например [49].

3.2. Построение отображений нулевого приближения с помощью радиальных прямых

Следует отметить, что в некоторых случаях, когда апертура ДОЭ представляет собой круг, а освещающий пучок имеет радиальную симметрию, вместо областей, ограниченных двумя прямыми, необходимо использовать области на ДОЭ, ограниченные двумя окружностями. Подобное отображение используется при расчете ДОЭ, фокусирующего круглый Гауссов пучок в круглый пучок с равномерным распределением интенсивности. Следует отметить, что лучевое отображение при фокусировке радиально-симметричного пучка в радиально-симметричную область требуемого радиуса обладает еще одним уникальным свойством. Радиальный отрезок, выходящий из начала координат в области ДОЭ, при лучевом отображении преобразуется также в радиальный отрезок в области фокусировки. Это свойство будем использовать для нахождения лучевого отображения при фокусировке круглого пучка в ромб, размер которого соответствует размеру сечения освещающего пучка.

Якобиан лучевого преобразования в полярной системе координат имеет вид

$$J = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\rho}{r} \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} - \frac{\partial \alpha}{\partial r} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right). \quad (35)$$

На нулевой итерации ограничимся простым отображением вида

$$\rho = \rho(r, \varphi); \quad \alpha = \alpha(\varphi). \quad (36)$$

Пусть уравнение кривой, ограничивающей фокальную область, в полярной системе координат имеет вид $\rho_0(\alpha)$. Функция $\alpha = \alpha(\varphi)$ находится из дифференциального уравнения

$$(d\alpha/d\varphi) = (I_0/I)(R^2/\rho_0^2(\alpha)). \quad (37)$$

Это дифференциальное уравнение следует из интегральной формы закона сохранения энергии в полярной системе координат.

Функцию $\rho = \rho(r, j)$ находим из решения уравнения

$$J = \frac{\rho}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = \frac{\rho}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{R^2}{\rho_0^2(\alpha)} \frac{I_0}{I}, \quad (38)$$

$$\left(J \frac{I}{I_0} \right) \frac{\rho_0^2(\alpha(\varphi))}{R^2} r = \rho \frac{\partial \rho}{\partial r}, \quad (39)$$

$$2r \left(J \frac{I}{I_0} \right) \frac{\rho_0^2(\alpha(\varphi))}{R^2} = \frac{\partial \rho^2}{\partial r}. \tag{40}$$

Интегрируя уравнение (40), получаем

$$\rho^2(r, \varphi) = (J(I/I_0)) \rho_0^2(\alpha(\varphi)) (r^2/R^2) + C(\varphi). \tag{41}$$

Учитывая граничное условие $\rho^2(0, \varphi) = 0$, получаем $C(\varphi) = 0$ и окончательное уравнение приобретает вид

$$\rho(r, \varphi) = \rho_0(\alpha(\varphi))(r/R). \tag{42}$$

В декартовых координатах лучевое соответствие имеет вид

$$\begin{aligned} x_0(u, v) &= (\rho_0(\alpha(\varphi))(r/R)) \cos(\alpha(\varphi)), \\ y_0(u, v) &= (\rho_0(\alpha(\varphi))(r/R)) \sin(\alpha(\varphi)), \end{aligned} \tag{43}$$

$$\varphi(u, v) = \arctg(v/u).$$

Уравнения (42) и (43) описывают лучевое соответствие радиальных линий на апертуре и радиальных линий в области фокусировки.

3.3. Восстановление эйкональной функции по функциям лучевого соответствия

В предыдущем параграфе были предложены различные методы поиска лучевого соответствия. Для окончательного решения обратной задачи фокусировки требуется восстановить эйкональную функцию ДОЭ. Восстановление эйкональной функции возможно только в случае, если выполняется условие (12).

В случае, когда условие восстановления эйкональной функции не выполняется, то эйкональную функцию можно найти путем минимизации функционала

$$\begin{aligned} &\iint (\partial \Phi_0(u, v) / \partial u - x_0(u, v))^2 du dv + \\ &+ \iint (\partial \Phi_0(u, v) / \partial v - y_0(u, v))^2 du dv \rightarrow \min. \end{aligned} \tag{44}$$

Пусть имеется набор точек u_i, v_i

$$\begin{aligned} &\sum ((\partial \Phi_0(u_i, v_i) / \partial u) - x_0(u_i, v_i))^2 + \\ &+ \sum ((\partial \Phi_0(u_i, v_i) / \partial v) - y_0(u_i, v_i))^2 \rightarrow \min. \end{aligned} \tag{45}$$

Представляя искомую функцию в виде разложения по базису

$$\Phi_0(u, v) = \sum_n C^n Z(u, v), \tag{46}$$

сводим задачу нахождения функции $\Phi_0(u, v)$ к минимизации функции относительно набора коэффициентов C^n . Задача сводится к решению системы линейных уравнений. После нахождения функции $\Phi_0(u, v)$ находим лучевое соответствие, которое реализуется с помощью данной функции.

$$\begin{aligned} x_1(u, v) &= (\partial \Phi_0(u, v) / \partial u), \\ y_1(u, v) &= (\partial \Phi_0(u, v) / \partial v). \end{aligned} \tag{47}$$

Это соответствие будет использоваться в алгоритме трассировки лучей для расчета результатов работы ДОЭ с помощью формулы (8).

Полученное лучевое соответствие может быть использовано для построения нового лучевого соответствия путем подстановки в (24). На основе материала пункта 3.1 можно организовать итерационный процесс. Итерации можно проводить до тех пор, пока результирующее лучевое соответствие будет давать распределение интенсивности, у которого отклонение от требуемого распределения будет уменьшаться. Итерационный процесс следует остановить, как только отклонение от требуемого распределения начнет увеличиваться.

3.4. Фокусировка в ромб

При фокусировке «круга в круг» радиальные линии, исходящие из центра круга в области оптического элемента, переходят в радиальные линии, расположенные в области фокусировки. Для фокусировки излучения из «круга в ромб», расположенный в фокальной области, будем использовать этот факт.

В качестве отображения возьмем отображение, использующее прямые линиями, которые исходят из центра круга. Отображение переводит радиальные отрезки на апертуре в отрезки прямых, исходящих из центра ромба.

Используя симметрию ромба, рассмотрим частный случай, когда уравнение кривой, ограничивающей область фокусировки, имеет вид для части ромба, расположенной в первом квадранте

$$\rho_0(\alpha) = \frac{a}{(\sin \alpha + \cos \alpha)} = \frac{a}{\sqrt{2} \sin(\alpha + (\pi/4))}. \tag{48}$$

Далее записываем уравнение для функции $\alpha(\varphi)$

$$(d\alpha / d\varphi) = (I_0 / I) (R^2 / \rho_0^2(\alpha)), \tag{49}$$

$$(d\alpha / d\varphi) = (2R^2 \sin^2(\alpha + (\pi/4)) / a^2) (I_0 / I). \tag{50}$$

Интегрируя уравнение, получаем

$$\alpha = \arctg(1 - (2R^2 / a^2)(I_0 / I)\varphi) - (\pi/4), \tag{51}$$

$$\alpha = (\pi/4) + \arctg((2R^2 / a^2)(I_0 / I)\varphi - 1). \tag{52}$$

Из закона сохранения энергии следует, что

$$I_0 \pi R^2 = 2a^2 I \quad (I_0 / I) = (2a^2 / \pi R^2). \tag{53}$$

Далее используем уравнения

$$\rho(r, \varphi) = \rho_0(\alpha(\varphi))(r/R), \tag{54}$$

$$\alpha(\varphi) = \pi/4 + \arctg((4/\pi)\varphi - 1), \tag{55}$$

$$\rho_0(\alpha) = a / \sqrt{2} \sin(\alpha + \pi/4), \tag{56}$$

$$\begin{aligned} \rho_0(\alpha(\varphi)) &= a / [\sqrt{2} \sin((\pi/2) + \arctg((4/\pi)\varphi - 1))] = \\ &= a / [\sqrt{2} \cos(\arctg(1 - (4/\pi)\varphi))]. \end{aligned} \tag{57}$$

Используя известное тригонометрическое соотношение, получаем

$$\begin{aligned} \rho_0(\alpha(\varphi)) &= a/[\sqrt{2}\cos(\arctg(1-(4/\pi)\varphi))] = \\ &= (a/\sqrt{2})\sqrt{1+(1-(4/\pi)\varphi)^2}. \end{aligned} \quad (58)$$

Лучевое соответствие в полярных координатах имеет вид

$$\rho(r, \varphi) = (a/\sqrt{2})\sqrt{1+(1-(4/\pi)\varphi)^2} (r/R). \quad (59)$$

В декартовых координатах это соответствие имеет вид

$$\begin{aligned} x_0(u, v) &= A(u, v)\cos(\alpha(\varphi)), \\ y_0(u, v) &= A(u, v)\sin(\alpha(\varphi)), \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} A(u, v) &= (a/\sqrt{2})\sqrt{1+(1-(4/\pi)\varphi(u, v))^2} \times \\ &\times (\sqrt{u^2+v^2}/R), \\ \alpha(\varphi) &= (\pi/4) + \arctg((4/\pi)\varphi - 1), \\ \varphi(u, v) &= \arctg(v/u). \end{aligned} \quad (61)$$

Используя полученное лучевое преобразование (60)–(61), восстанавливаем эйкональную функцию $\Phi_0(u, v)$. Приведенное соответствие (60)–(61) не требует дальнейшего итерационного улучшения.

На рис. 2 представлены результаты фокусировки круглого пучка с радиусом $R=1$ в ромб с размером половины диагонали $A=1$, полученные методом трассировки лучей (8). Расчёт проводился с помощью метода секторов в полярной системе координат. В этом случае полагалось, что радиальный отрезок с центром в начале координат в области ДОЭ переходит в радиальный отрезок в области фокусировки. Аппроксимация эйкональной функции проводилась с помощью полинома степени 8.

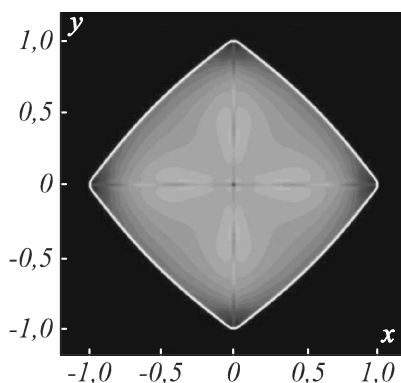


Рис. 2. Результат фокусировки круглого пучка с радиусом $R=1$ в ромб с размером половины диагонали $A=1$

4. Итерационное улучшение лучевого соответствия

На нулевой итерации было получено лучевое соответствие и эйкональная функция ДОЭ (47). Для улучшения решения применим метод последовательных приближений.

Для получения более точного результата необходимо решить уравнение

$$\begin{aligned} (\partial x_1(u, v)/\partial v)(\partial y^1(u, v)/\partial u) - \\ - (\partial x_1(u, v)/\partial u)(\partial y^1(u, v)/\partial v) + (S/S_0) = 0, \end{aligned} \quad (62)$$

где S – площадь области фокусировки, S_0 – площадь апертуры ДОЭ, занимаемая пучком.

Более совершенное лучевое отображение будет описываться уравнениями

$$x = x_1(u, v) = x^1(u, v), \quad y = y^1(u, v).$$

Уравнение (62) представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных. Решение этого уравнения сводится к решению характеристической системы вида

$$\begin{aligned} \partial u(s, t)/\partial s &= (\partial x_1(u, v)/\partial v), \\ \partial v(s, t)/\partial s &= -(\partial x_1(u, v)/\partial u). \end{aligned} \quad (63)$$

Начальные условия для решения уравнения имеют вид

$$u(0, t) = u_0(t), \quad v(0, t) = v_0(t), \quad (64)$$

где функции $u_0(t)$, $v_0(t)$ являются параметрическими уравнениями кривой, ограничивающей апертуру оптического элемента, t – параметр кривой.

Введём функции $X^1(s, t)$, $Y^1(s, t)$, описывающие лучевое соответствие в криволинейных координатах (s, t) . Характеристическое уравнение для функции $Y^1(s, t)$ имеет вид

$$\partial Y^1(s, t)/\partial s = -(S/S_0). \quad (65)$$

Начальное условие для решения этого уравнения имеет вид

$$Y^1(0, t) = Y_0(t). \quad (66)$$

Функция $Y_0(t)$ выбирается таким образом, чтобы пара функций $X_0(t)$, $Y_0(t)$, где

$$X_0(t) = x_1(u(0, t), v(0, t)) \quad (67)$$

являлись параметрическими уравнениями кривой, ограничивающей область фокусировки

В результате получаем, что лучевое соответствие в криволинейных координатах имеет вид

$$\begin{aligned} x &= X^1(s, t) = x_1(u(s, t), v(s, t)), \\ y &= Y^1(s, t). \end{aligned} \quad (68)$$

Криволинейные координаты (s, t) (63) связаны с декартовыми координатами в области ДОЭ

$$u = u(s, t); \quad v = v(s, t). \quad (69)$$

В результате, перебирая параметры (s, t) внутри двумерного многообразия, получим множество пар

$$(u_j, v_j) \rightarrow (x_j, y_j); \quad (70)$$

$$u_j = u(s_j, t_j); \quad v_j = v(s_j, t_j); \quad (71)$$

$$x_j = x_1(u(s_j, t_j), v(s_j, t_j)); \quad y_j = Y^1(s_j, t_j). \quad (72)$$

Далее, используя это множество пар, находим эйкональную функцию ДОЭ $\Phi_1(u, v)$, с помощью которой приближенно реализуется данное лучевое соот-

ветствие. Соответствующие лучевые отображения имеют вид

$$\begin{aligned}x_2(u, v) &= u + (\partial\Phi_1/\partial u)f, \\y_2(u, v) &= v + (\partial\Phi_1/\partial v)f.\end{aligned}\quad (73)$$

Далее итерационный процесс повторяется. На итерации с номером n решается уравнение

$$\begin{aligned}(\partial x_n(u, v)/\partial v)(\partial y^n(u, v)/\partial u) - \\ - (\partial x_n(u, v)/\partial u)(\partial y^n(u, v)/\partial v) + (S/S_0) = 0.\end{aligned}\quad (74)$$

Лучевое соответствие имеет вид

$$\begin{aligned}x &= x_n(u, v) = x^n(u, v), \\y &= y^n(u, v).\end{aligned}\quad (75)$$

Далее находится эйкональная функция $\Phi_n(u, v)$, реализующая данное отображение, и соответствующее ей отображение

$$\begin{aligned}x_{n+1}(u, v) &= u + (\partial\Phi_n/\partial u)f, \\y_{n+1}(u, v) &= v + (\partial\Phi_n/\partial v)f.\end{aligned}\quad (76)$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока он сходится к нужному решению. В случае, если на следующей итерации процесс начинает расходиться, итерационный процесс останавливается. Процесс считается расходящимся, если полученное распределение энергии в фокальной плоскости отличается от эталонного распределения сильнее, чем на предыдущей итерации.

Данный метод может быть использован для улучшения лучевого соответствия, полученного методами, изложенными в пунктах 3.1 и 3.2. Это позволит рассчитать ДОЭ, у которого отклонение полученного распределения интенсивности от требуемого минимально.

Заключение

Метод расчета, предложенный в настоящей работе, в дальнейшем будет использован для расчета дифракционных оптических элементов, которые предназначены для фокусировки в плоские области, имеющие более сложную форму. В дальнейшем необходимо усовершенствовать метод восстановления эйкональной функции ДОЭ по известному лучевому соответствию. Для улучшения метода восстановления эйкональной функции могут быть использованы бикубические сплайны. Возможно использование предлагаемых ДОЭ не только в лазерных технологических установках, но и для подсветки местности в ночное время при дистанционном зондировании Земли с низколетящего беспилотного летательного аппарата.

Благодарности

Работа выполнена за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 14-31-00014).

Литература

1. **Bryngdahl, O.** Laser beam scanning using computer generated holograms / O. Bryngdahl, W.H. Lee // *Applied Optics*. – 1976. – Vol. 15(1). – P. 183-194.
2. **Bryngdahl, O.** Geometrical transforms in optics / O. Bryngdahl // *Journal of Optical Society of America*. – 1974. – Vol. 64(8). – P. 1092-1099.
3. **Голуб, М.А.** Фокусировка когерентного излучения в заданную область пространства с помощью синтезированных на ЭВМ голограмм / М.А. Голуб, С.В. Карпеев, А.М. Прохоров, И.Н. Сисакян, В.А. Соيفер // *Письма в ЖТФ*. – 1981. – Т. 7, № 10. – С. 618-623.
4. **Голуб, М.А.** Машинный синтез фокусирующих элементов для СО₂-лазера / М.А. Голуб, В.П. Дегтярева, А.Н. Климов, В.В. Попов, А.М. Прохоров, И.Н. Сисакян, В.А. Соифер // *Письма в ЖТФ*. – 1982. – Т. 8, № 13. – С. 449-451.
5. **Данилов, В.А.** Синтез оптических элементов, создающих фокальную линию произвольной формы / В.А. Данилов, В.В. Попов, А.М. Прохоров, Д.М. Сагатеян, И.Н. Сисакян, В.А. Соифер // *Письма в ЖТФ*. – 1982. – Т. 8, № 13. – С. 810-815.
6. **Гончарский, А.В.** Решение обратной задачи фокусировки лазерного излучения в произвольную кривую / А.В. Гончарский, В.А. Данилов, В.В. Попов, А.М. Прохоров, И.Н. Сисакян, В.А. Соифер, В.В. Степанов // *Доклады АН СССР*. – 1983. – Т. 273, № 3. – С. 605-608.
7. **Данилов, В.А.** Теория когерентных фокусаторов / В.А. Данилов, Б.Е. Кинбер, А.Е. Шилов // *Компьютерная оптика*. – 1987. – Вып. 1. – С. 40-52.
8. **Golub, M.A.** Infra-red radiation focusators / M.A. Golub, I.N. Sisakian, V.A. Soifer // *Optics and Lasers in Engineering*. – 1991. – Vol. 15(5). – P. 297-309. – DOI: 10.1016/0143-8166(91)90017-N.
9. **Doskolovich, L.L.** Analytic design of optical elements generating a line focus / L.L. Doskolovich, A.Yu. Dmitriev, S.I. Kharitonov // *Optical Engineering*. – 2013. – Vol. 52(9). – 091707. – DOI: 10.1117/1.OE.52.9.091707.
10. **Hilton, P.A.** Use of a diffractive optic for high power laser cutting / P.A. Hilton, D. Lloyd, J.R. Tyrer // *Journal of Laser Applications*. – 2016. – Vol. 28. – 012014. – DOI: 10.2351/1.4938279.
11. **Abul'khanov, S.R.** Technological applications of focusing optical elements / S.R. Abul'khanov // *Proceedings of SPIE*. – 2014. – Vol. 9533. – 95330B. – DOI: 10.1117/12.2180564.
12. **Doskolovich, L.L.** Focusators for laser-branding / L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov, G.V. Usplenjev // *Optics and Lasers in Engineering*. – 1991. – Vol. 15(5). – P. 311-322. – DOI: 10.1016/0143-8166(91)90018-O.
13. **Grewell, D.** Diffractive optics as beam-shaping elements for plastics laser welding / D. Grewell, A. Benatar // *Optical Engineering*. – 2007. – Vol. 46(11). – 118001. – DOI: 10.1117/1.2802588.
14. **Aslanov, E.R.** Design of an optical element forming an axial line segment for efficient LED lighting systems / E.R. Aslanov, L.L. Doskolovich, M.A. Moiseev, E.A. Bezus, N.L. Kazanskiy // *Optics Express*. – 2013. – Vol. 21(23). – P. 28651-28656. – DOI: 10.1364/OE.21.028651.
15. **Popov, S.B.** The intellectual lighting for optical information-measuring systems / S.B. Popov // *Proceedings of SPIE*. – 2014. – Vol. 9533. – 95330P. – DOI: 10.1117/12.2181168.
16. **Kazanskiy, N.L.** Binary beam splitter / N.L. Kazanskiy, R.V. Skidanov // *Applied Optics*. – 2012. – Vol. 51(14). – P. 2672-2677. – DOI: 10.1364/AO.51.002672.

17. **Досколович, Л.Л.** Расчёт эйконала светового поля для фокусировки в набор точек / Л.Л. Досколович, М.А. Моисеев, Е.В. Бызов, С.В. Кравченко // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 3. – С. 443-448.
18. **Kazanskiy, N.L.** Synthesis of nanoporous structures in metallic materials under laser action / N.L. Kazanskiy, S.P. Murzin, Y.L. Osetrov, V.I. Tregub // Optics and Lasers in Engineering. – 2011. – Vol. 49(11). – P. 1264-1267. – DOI: 10.1016/j.optlaseng.2011.07.001.
19. **Murzin, S.P.** Formation of nanoporous structures in metallic materials by pulse-periodic laser treatment / S.P. Murzin // Optics and Laser Technology. – 2015. – Vol. 72. – P. 48-52. – DOI: 10.1016/j.optlastec.2015.03.022.
20. **Murzin, S.P.** Local laser annealing for aluminium alloy parts / S.P. Murzin // Lasers in Engineering. – 2016. – Vol. 33(1-3). – P. 67-76.
21. **Doskolovich, L.L.** Analytical source-target mapping method for the design of freeform mirrors generating prescribed 2D intensity distributions / L.L. Doskolovich, E.A. Bezus, M.A. Moiseev, D.A. Bykov, N.L. Kazanskiy // Optics Express. – 2016. – Vol. 24(10). – P. 10962-10971. – DOI: 10.1364/OE.24.010962.
22. **Rodgers, K.J.** Improved method of laser thermal keratoplasty to overcome presbyopia / K.J. Rodgers, H.G. Glen, J.J. Salz, E. Maguen, M.J. Berry // Proceedings of SPIE. – 2011. – Vol. 7885. – 78850N. – DOI: 10.1117/12.878330.
23. **Соболь, Э.Н.** Перспективные лазерные технологии модификации структуры и реконструкции тканей в отоларингологии, ортопедии и офтальмологии / Э.Н. Соболь, О.И. Баум, А.И. Омельченко, Н.Н. Воробьева, О.Л. Захаркина, Ю.М. Сошникова, А.В. Южаков, Е.М. Щербakov, А.Б. Шехтер, А.Е. Гуллер, А.В. Большунов, А.В. Басков, В.М. Свистушкин. – В кн.: Современные лазерно-информационные технологии / под ред. В.Я. Панченко, В.Ф. Лебедева. – М.: Интерконтакт Наука, 2015. – С. 567-614.
24. **Veldkamp, W.B.** Beam profile shaping for laser radars that use detector arrays / W.B. Veldkamp, C.J. Kastner // Applied Optics. – 1982. – Vol. 21. – P. 345-356.
25. **Veldkamp, W.B.** Laser beam profile shaping with interlaced binary gratings / W.B. Veldkamp // Applied Optics. – 1982. – Vol. 21. – P. 3209-3212.
26. **Han, C.-Y.** Reshaping collimated laser beams with Gaussian profile to uniform profiles / C.-Y. Han, Y. Ishii, K. Murata // Applied Optics. – 1983. – Vol. 22(22). – P. 3644-3647.
27. **Roberts, N.C.** Beam shaping by holographic filters / N.C. Roberts // Applied Optics. – 1989. – Vol. 28(1). – P. 31-32.
28. **Eismann, M.T.** Iterative design of holographic beamformer / M.T. Eismann, A.M. Tai, J.N. Cederquist // Applied Optics. – 1989. – Vol. 28(13). – P. 2541-2650.
29. **Голуб, М.А.** Вычислительный эксперимент с фокусатором Гауссова пучка в прямоугольник с постоянной интенсивностью / М.А. Голуб, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер, С.И. Харитонов // Компьютерная оптика. – 1990. – Вып. 7. – С. 42-49.
30. **Aleksoff, C.C.** Holographic conversion of a Gaussian beam to a near-field uniform beam / C.C. Aleksoff, K.K. Ellis, B.D. Neagle // Optical Engineering. – 1991. – Vol. 30(5). – P. 537-543.
31. **Sweatt, W.C.** Transforming a circular laser beam into a square or trapezoid-almost / W.C. Sweatt // Optical Engineering. – 1992. – Vol. 31(2). – P. 245-250.
32. **Roberts, N.C.** Multilevel computer-generated holograms with separable phase functions for beam shaping / N.C. Roberts // Applied Optics. – 1992. – Vol. 31(17). – P. 3198-3200.
33. **Голуб, М.А.** Исследование фокусаторов в прямоугольник методом вычислительного эксперимента / М.А. Голуб, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, В.А. Сойфер, С.И. Харитонов // Компьютерная оптика. – 1992. – Вып. 10-11. – С. 110-122.
34. **Досколович, Л.Л.** Исследование голографических оптических элементов, фокусирующих в двумерную прямоугольную область / Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский // Компьютерная оптика. – 1992. – Вып. 12. – С. 14-17.
35. **Cordingley, J.** Application of a binary diffractive optic for beam shaping in semiconductor processing by lasers / J. Cordingley // Applied Optics. – 1993. – Vol. 32, Issue 14. – P. 2538-2542.
36. **Doskolovich, L.L.** Diffraction investigation of focusators into plane area / L.L. Doskolovich, M.A. Golub, N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov, V.A. Soifer // Proceedings of SPIE. – 1993. – Vol. 1983, Part 2. – P. 656-657.
37. **Stevenson, R.M.** Binary-phase zone plate arrays for the generation of uniform focal profiles / R.M. Stevenson, M.J. Norman, T.H. Bett, D.A. Pepler, C.N. Danson, I.N. Ross // Optical Letters. – 1994. – Vol. 19(6). – P. 363-365.
38. **Kazanskiy, N.L.** Computer-aided design of diffractive optical elements / N.L. Kazanskiy, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer // Optical Engineering. – 1994. – Vol. 33(10). – P. 3156-3166. – DOI: 10.1117/12.178898.
39. **Досколович, Л.Л.** Расчёт бинарных дифракционных оптических элементов для фокусировки в заданную двумерную область / Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, В.А. Сойфер // Автометрия. – 1995. – № 5. – С. 42-50.
40. **Duparré, M.** Investigation of computer-generated diffractive beam shapers for flattening of single-modal CO₂ laser beams / M. Duparré, M.A. Golub, B. Lüdge, V.S. Pavelyev, V.A. Soifer, G.V. Uspleniev, S.G. Volotovskii // Applied Optics. – 1995. – Vol. 34(14). – P. 2489-2497. – DOI: 10.1364/AO.34.002489.
41. **Khonina, S.N.** Levelling the focal spot intensity of the focused Gaussian beam / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, V.A. Soifer // Journal of Modern Optics. – 2000. – Vol. 47(5). – P. 883-904.
42. **Doskolovich, L.L.** Focusators into a ring / L.L. Doskolovich, S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, I.V. Nikolsky, V.A. Soifer, G.V. Uspleniev // Optical and Quantum Electronics. – 1993. – Vol. 25(11). – P. 801-814.
43. **Greisukh, G.I.** Optics of diffractive and gradient-index elements and systems / G.I. Greisukh, S.T. Bobrov, S.A. Stepanov. – Bellingham: SPIE Press, 1997. – 414 p. – ISBN: 9780819424518.
44. **Komenda, O.** Design of rotationally symmetric diffractive beam shapers using IFTA / O. Komenda, M. Skeren // Frontiers in Optics. – 2006. – OSA Technical Digest (CD). – JSuA48. – DOI: 10.1364/FIO.2006.JSuA48.
45. **Umhofer, U.** Refractive and diffractive laser beam shaping optics / U. Umhofer, E. Jäger, C. Bischoff // Laser Technik Journal. – 2011. – Vol. 8. – P. 24-27. – DOI: 10.1002/latj.201190020.
46. **Yao, P.-H.** Low speckle laser illuminated projection system with a vibrating diffractive beam shaper / P.-H. Yao, Chieh-Hui Chen, Cheng-Huan Chen // Optics Express. – 2012. – Vol. 20(15). – P. 16552-16566. – DOI: 10.1364/OE.20.016552.
47. **Hsu, K.-H.** Trade-off between diffraction efficiency and uniformity for design of binary diffractive laser beam shaper / K.-H. Hsu, H.Y. Lin // Optical Review. – 2013. – Vol. 20(4). – P. 296-302. – DOI: 10.1007/s10043-013-0054-x.

48. **Doskolovich, L.L.** A method of designing diffractive optical elements focusing into plane areas / L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov, V.A. Soifer // Journal of

Modern Optics. – 1996. – Vol. 43(7). – P. 1423-1433. – DOI: 10.1080/09500349608232815.

49. **Кошляков, Н.С.** Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.

Сведения об авторах

Харитонов Сергей Иванович, 1961 года рождения. Доктор физико-математических наук, доцент кафедры технической кибернетики, старший научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики Института систем обработки изображений РАН – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. 1984 г. – окончил физический факультет Самарского государственного университета. 1993 г. – защитил кандидатскую диссертацию на тему «Асимптотические методы дифракционного расчёта фокусаторов лазерного излучения». 2010 г. – защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические методы расчёта дифракции когерентного электромагнитного излучения на дифракционных оптических элементах». Область научных интересов: дифракционная, квантовая оптика, физика плазмы. В списке научных работ С.И. Харитонova 87 статей, 5 авторских свидетельств и патентов. E-mail: prognoz2007@gmail.com.

Досколович Леонид Леонидович В 1989 году с отличием окончил Куйбышевский авиационный институт (КуАИ, ныне – Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2001 год), профессор, работает заведующим лабораторией дифракционной оптики Института систем обработки изображений РАН – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, профессором кафедры технической кибернетики и ведущим научным сотрудником научно-исследовательской лаборатории прорывных технологий дистанционного зондирования Земли Самарского университета. Специалист в области дифракционной оптики, лазерных информационных технологий, нанофотоники. E-mail: leonid@smr.ru.

Казанский Николай Львович, 1958 года рождения. В 1981 году с отличием окончил Куйбышевский авиационный институт (КуАИ, ныне – Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (1996 год), профессор, работает руководителем Института систем обработки изображений РАН – филиала Федерального научно-исследовательского центра «Кристаллография и фотоника» Российской академии наук (ИСОИ РАН), профессором кафедры технической кибернетики Самарского университета. Ведущий научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории прорывных технологий дистанционного зондирования Земли в Самарском университете, заведующий базовой (Самарского университета в ИСОИ РАН) кафедрой высокопроизводительных вычислений. Является членом международных научных обществ OSA, SPIE и IAPR. Н.Л. Казанский – специалист в области дифракционной оптики, математического моделирования, обработки изображений и нанофотоники. В списке научных работ Н.Л. Казанского 290 статей, 12 монографий, 53 авторских свидетельств и патентов. Страница в интернете: <http://www.ipsi.smr.ru/staff/kazanskiy.htm>. E-mail: kazanskiy@ssau.ru.

ГРНТИ: 29.31.29.

Поступила в редакцию 2 июня 2016 г. Окончательный вариант – 27 августа 2016 г.

SOLVING THE INVERSE PROBLEM OF FOCUSING LASER RADIATION IN A PLANE REGION USING GEOMETRICAL OPTICS

S.I. Kharitonov^{1,2}, L.L. Doskolovich^{1,2}, N.L. Kazanskiy^{1,2}

¹ Samara National Research University, Samara, Russia,

² Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Samara, Russia

Abstract

We proposed a method for calculating the eikonal function of a light field from the condition of generating a desired intensity distribution in a predetermined region of the focal plane. To improve the efficiency of solving the problem of focusing we developed a modification of a method of rectangle matching, which enables designing diffractive optical elements (DOE) intended to focus into a plane region. The novelty of our approach consists in a method of reconstructing the eikonal function from the known ray map of points on the DOE onto points in the focal plane. We presented the results of the DOE-aided focusing into a circle, a rectangle, a rhombus, and a super-ellipse. The simulation results showed the high quality of focusing, thus corroborating the efficiency of the proposed method. We expect to use the diffractive optical elements (DOE) for lighting the area of interest from low-flying drones used for night-time Earth remote sensing.

Keywords: geometrical optics, the eikonal function, focusing, method of matched rectangles, ray mapping.

Citation: Kharitonov SI, Doskolovich LL, Kazanskiy NL. Solving the inverse problem of focusing laser radiation in a plane region using geometrical optics. *Computer Optics* 2016; 40(4): 439-450. DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-4-439-450.

Acknowledgement: The work was funded by the Russian Science Foundation (RSF, project No. 14-31-00014).

References

- [1] Bryngdahl O, Lee WH. Laser beam scanning using computer generated holograms. *Appl Opt* 1976; 15(1): 183-194.
- [2] Bryngdahl O. Geometrical transforms in optics. *J Opt Soc Am* 1974; 64(8): 1092-1099.
- [3] Golub MA, Karpeev SV, Prokhorov AM, Sisakyan IN, Soifer VA. Focusing light into a specified volume by computer synthesized holograms. *Soviet Technical Physics Letters* 1981; 7(10): 264-266.
- [4] Golub MA, Degtyarova VP, Klimov AN, Popov VV, Prokhorov AM, Sisakyan IN, Soifer VA. Machine synthesis of focusing elements for CO₂-laser [in Russian]. *Soviet Technical Physics Letters* 1982; 8(13): 449-451.
- [5] Danilov VA, Popov VV, Prokhorov AM, Sagatelyan DM, Sisakyan IN, Soifer VA. Synthesis of optical elements, that create focal free-form line [in Russian]. *Soviet Technical Physics Letters* 1982; 8(13): 810-815.
- [6] Goncharsky AV, Danilov VA, Popov VV, Prokhorov AM, Sissakian IN, Soifer VA, Stepanov VV. Solution of the inverse problem of focusing of laser radiation into an arbitrary curve [in Russian]. *Doklady AN SSSR* 1983; 273(3): 605-608.
- [7] Danilov VA, Kinber BE, Shishlov AV. Theory of coherent focusers [In Russian]. *Computer Optics* 1989; 1(1): 29-37.
- [8] Golub MA, Sisakyan IN, Soifer VA. Infra-red radiation focusators. *Optics and Lasers in Engineering* 1991; 15(5): 297-309. DOI: 10.1016/0143-8166(91)90017-N.
- [9] Doskolovich LL, Dmitriev AYu, Kharitonov SI. Analytic design of optical elements generating a line focus. *Optical Engineering* 2013; 52(9): 091707. DOI: 10.1117/1.OE.52.9.091707.
- [10] Hilton PA, Lloyd D, Tyrer JR. Use of a diffractive optic for high power laser cutting. *Journal of Laser Applications* 2016; 28: 012014. DOI: 10.2351/1.4938279.
- [11] Abul'khanov SR. Technological applications of focusing optical elements. *Proc SPIE* 2014; 9533: 95330B. DOI: 10.1117/12.2180564.
- [12] Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Kharitonov SI, Usplenjev GV. Focusators for laser-branding. *Optics and Lasers in Engineering* 1991; 15(5): 311-322. DOI: 10.1016/0143-8166(91)90018-O.
- [13] Grewell D, Benatar A. Diffractive optics as beam-shaping elements for plastics laser welding. *Optical Engineering* 2007; 46(11): 118001. DOI: 10.1117/1.2802588.
- [14] Aslanov ER, Doskolovich LL, Moiseev MA, Bezus EA, Kazanskiy NL. Design of an optical element forming an axial line segment for efficient LED lighting systems. *Optics Express* 2013; 21(23): 28651-28656. DOI: 10.1364/OE.21.028651.
- [15] Popov SB. The intellectual lighting for optical information-measuring systems. *Proc SPIE* 2014; 9533: 95330P. DOI: 10.1117/12.2181168.
- [16] Kazanskiy NL, Skidanov RV. Binary beam splitter. *Appl Opt* 2012; 51(14): 2672-2677. DOI: 10.1364/AO.51.002672.
- [17] Doskolovich LL, Moiseev MA, Byzov EV, Kravchenko SV. Computation of light field eikonal to focus into a set of points. *Computer Optics* 2014; 38(3): 443-448.
- [18] Kazanskiy NL, Murzin SP, Osetrov YL, Tregub VI. Synthesis of nanoporous structures in metallic materials under laser action. *Optics and Lasers in Engineering* 2011; 49(11): 1264-1267. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2011.07.001.
- [19] Murzin SP. Formation of nanoporous structures in metallic materials by pulse-periodic laser treatment. *Optics and Laser Technology* 2015; 72: 48-52. DOI: 10.1016/j.optlastec.2015.03.022.
- [20] Murzin SP. Local laser annealing for aluminium alloy parts. *Lasers in Engineering* 2016; 33(1-3): 67-76.
- [21] Doskolovich LL, Bezus EA, Moiseev MA, Bykov DA, Kazanskiy NL. Analytical source-target mapping method for the design of freeform mirrors generating prescribed 2D intensity distributions. *Optics Express* 2016; 24(10): 10962-10971. DOI: 10.1364/OE.24.010962.
- [22] Rodgers KJ, Glen HG, Salz JJ, Maguen E, Berry MJ. Improved method of laser thermal keratoplasty to overcome presbyopia. *Proc SPIE* 2011; 7885: 78850N. DOI: 10.1117/12.878330.
- [23] Sobol EN, Baum OI, Omelchenko AI, Vorobyeva NN, Zakharkina OL, Soshnikova YM, Yuzhakov AV, Shcherbakov EM, Shekhter AB, Guller AE, Bolshunov AV, Baskov AV, Svistushkin VM. Promising laser technology for modification of structure and reconstruction of tissues in otolaryngology, orthopedics and ophthalmology. In book: Panchenko VYa, Lebedev VF, eds. *Modern laser-information technology* [In Russian]. Moscow: "Interkontakt Nauka" Publisher; 2015: 567-614.
- [24] Veldkamp WB, Kastner CJ. Beam profile shaping for laser radars that use detector arrays. *Appl Opt* 1982; 21: 345-356.
- [25] Veldkamp WB. Laser beam profile shaping with interlaced binary gratings. *Appl Opt* 1982; 21: 3209-3212.
- [26] Han CY, Ishii Y, Murata K. Reshaping collimated laser beams with Gaussian profile to uniform profiles. *Appl Opt* 1983; 22(22): 3644-3647.
- [27] Roberts NC. Beam shaping by holographic filters. *Appl Opt* 1989; 28(1): 31-32.
- [28] Eismann MT, Tai AM, Cederquist JN. Iterative design of holographic beamformer. *Appl Opt* 1989; 28(13): 2541-2650.
- [29] Golub MA, Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Sisakyan IN, Soifer VA, Kharitonov SI. Computational experiment with the focusator of Gaussian beam into a rectangle with constant intensity [In Russian]. *Computer Optics* 1990; 7: 42-49.
- [30] Aleksoff CC, Ellis KK, Neagle BD. Holographic conversion of a Gaussian beam to a near-field uniform beam. *Optical Engineering* 1991; 30(5): 537-543.
- [31] Sweatt WC. Transforming a circular laser beam into a square or trapezoid-almost. *Optical Engineering* 1992; 31(2): 245-250.
- [32] Roberts NC. Multilevel computer-generated holograms with separable phase functions for beam shaping. *Appl Opt* 1992; 31(17): 3198-3200.
- [33] Golub MA, Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Soifer VA, Kharitonov SI. Study of focusators in a rectangle by the method of computational experiment [In Russian]. *Computer Optics* 1992; 10-11: 110-122.

- [34] Doskolovich LL, Kazanskiy NL. The study of holographic optical elements, the focusing in a two-dimensional rectangular region [In Russian]. *Computer Optics* 1992; 12: 14-17.
- [35] Cordingley J. Application of a binary diffractive optic for beam shaping in semiconductor processing by lasers. *Appl Opt* 1993; 32(14): 2538-2542.
- [36] Doskolovich LL, Golub MA, Kazanskiy NL, Kharitonov SI, Soifer VA. Diffraction investigation of focusators into plane area. *Proc SPIE* 1993; 1983(2): 656-657.
- [37] Stevenson RM, Norman MJ, Bett TH, Pepler DA, Danson CN, Ross IN. Binary-phase zone plate arrays for the generation of uniform focal profiles. *Opt Lett* 1994; 19(6): 363-365.
- [38] Kazanskiy NL, Kotlyar VV, Soifer VA. Computer-aided design of diffractive optical elements. *Optical Engineering* 1994; 33(10): 3156-3166. DOI: 10.1117/12.178898.
- [39] Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Soifer VA. Calculation of binary diffraction optical elements for focusing into a given two-dimensional region [in Russian]. *Avtometriya* 1995; (5): 42-50.
- [40] Duparré M, Golub MA, Lüdge B, Pavelyev VS, Soifer VA, Uspleniev GV, Volotovskii SG. Investigation of computer-generated diffractive beam shapers for flattening of single-modal CO₂ laser beams. *Applied Optics* 1995; 34(14): 2489-2497. DOI: 10.1364/AO.34.002489.
- [41] Khonina SN, Kotlyar VV, Skidanov RV, Soifer VA. Levelling the focal spot intensity of the focused Gaussian beam. *Journal of Modern Optics* 2000; 47(5): 883-904.
- [42] Doskolovich LL, Khonina SN, Kotlyar VV, Nikolsky IV, Soifer VA, Uspleniev GV. Focusators into a ring. *Optical and Quantum Electronics* 1993; 25(11): 801-814.
- [43] Greisukh GI, Bobrov ST, Stepanov SA. Optics of diffractive and gradient-index elements and systems. Bellingham: SPIE Press; 1997.
- [44] Komenda O, Skeren M. Design of rotationally symmetric diffractive beam shapers using IFTA. *Frontiers in Optics* 2006: JSuA48. DOI: 10.1364/FIO.2006.JSuA48.
- [45] Umhofer U, Jäger E, Bischoff C. Refractive and diffractive laser beam shaping optics. *Laser Technik Journal* 2011; 8: 24-27. DOI: 10.1002/latj.201190020.
- [46] Yao PH, Chen CH, Chen CH. Low speckle laser illuminated projection system with a vibrating diffractive beam shaper. *Optics Express* 2012; 20(15): 16552-16566. DOI: 10.1364/OE.20.016552.
- [47] Hsu KH, Lin HY. Trade-off between diffraction efficiency and uniformity for design of binary diffractive laser beam shaper. *Optical Review* 2013; 20(4): 296-302. DOI: 10.1007/s10043-013-0054-x.
- [48] Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Kharitonov SI, Soifer VA. A method of designing diffractive optical elements focusing into plane areas. *Journal of Modern Optics* 1996; 43(7): 1423-1433. DOI: 10.1080/09500349608232815.
- [49] Koshlyakov NS, Gleaner EB, Smirnov MM. Partial differential equations of mathematical physics [In Russian]. Moscow: "Vyshaya Shkola" Publisher; 1970. 712 p.

Authors' information

Sergey Ivanovich Kharitonov (b.1961), Senior Researcher of Diffractive Optics laboratory of the Image Processing Systems Institute of RAS, Doctor of Physical and Mathematical Sciences. 1984 – graduated from Physics department of Samara State University. 1993 – defended his dissertation "Asymptotic methods of calculation of the diffraction of laser radiation Focuser". 2010 – defended his doctoral thesis on "Asymptotic methods for calculating the diffraction of coherent electromagnetic radiation in diffractive optical elements". Research interests: diffraction, quantum optics, plasma physics. The list of scientific papers S.I. Kharitonov's 87 articles, 5 patents. E-mail: prognoz2007@gmail.com.

Leonid Leonidovich Doskolovich graduated with honours (1989) from S.P. Korolyov Kuibyshev Aviation Institute (presently, Samara National Research University), majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths (2001) degree from Samara University. Head of Diffractive Optics laboratory of the Image Processing Systems Institute of the RAS, professor at Technical Cybernetics subdepartment, the senior researcher at the Breakthrough Technologies for Earth's Remote Sensing laboratory at Samara University. His leading research interests include diffractive optics, laser information technologies, and nanophotonics. E-mail: leonid@smr.ru.

Nikolay Lvovich Kazanskiy (b. 1958), graduated with honours (1981) from S. P. Korolyov Kuibyshev Aviation Institute (presently, S. P. Korolyov Samara National Research University), majoring in Applied Mathematics. He received his Candidate in Physics & Maths (1988) and Doctor in Physics & Maths (1996) degrees from Samara University. He is the director of Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences (IPSI RAS), holding a part-time position of professor at Technical Cybernetics sub-department of Samara University, leading researcher at the Breakthrough Technologies for Earth's Remote Sensing laboratory in Samara University, holding the chair of its base sub-department of High-Performance Computing at IPSI RAS. He is an OSA, SPIE and IAPR member. He is co-author of 290 scientific papers, 12 monographs, 53 inventions and patents. His current research interests include diffractive optics, mathematical modeling, image processing, and nanophotonics. Website: <http://www.ipsi.smr.ru/staff/kazanskiy.htm>. E-mail: kazanskiy@ssau.ru.

Received June 2, 2016. The final version – August 27, 2016.
