

МЕТОДЫ И ЭЛЕМЕНТЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ ОПТИКИ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВОДНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В РАМКАХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТЕОРИИ

Д.Л. Головашкин, А.А. Дегтярёв *, В.А. Сойфер

Институт систем обработки изображений РАН,

*) Самарский государственный аэрокосмический университет

Введение

В связи с развитием численных методов и прогрессом в области вычислительной техники появилась возможность численного решения уравнений Максвелла. Таким образом, наложением соответствующих граничных условий и подстановкой в уравнения параметров среды возможно моделирование процесса распространения излучения в различных средах.

В работе [1] изложен разностный метод решения уравнений Максвелла и получены результаты для оптических интегральных схем. В нашей работе проводятся исследования градиентных сред и дифракционных оптических элементов. Для этого применяется разностная схема «push-pull», которая позволяет исследовать градиентные волокна на малых расстояниях и дифракционные оптические элементы непосредственно за их плоскостью. Разностный метод реализован для решения уравнений Максвелла в декартовых координатах в случае ТЕ поляризованной волны. Для ТМ поляризации может быть построена аналогичная схема при других граничных условиях.

1. Постановка задачи о распространении излучения

Уравнения Максвелла, описывающие распространение электромагнитных полей в диэлектрике, выглядят следующим образом [1]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial \tau} &= \frac{1}{\mu_{zz}} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial H_y}{\partial \tau} &= \frac{1}{\mu_{yy}} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial H_x}{\partial \tau} &= \frac{1}{\mu_{xx}} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial E_z}{\partial \tau} &= \frac{1}{\varepsilon_{zz}} \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial E_y}{\partial \tau} &= \frac{1}{\varepsilon_{yy}} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial E_x}{\partial \tau} &= \frac{1}{\varepsilon_{xx}} \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} (1)$$

где E и H электрическая и магнитная составляющие поля, $\tau=ct$, c - скорость света в свободном пространстве, t - время, ε и μ - диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Пусть среда представляет собой тонкий слой, расположенный в плоскости (Y,Z) , а излучение направлено вдоль оси Z . В случае ТЕ поляризованной волны уравнения (1) примут вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial \tau} &= \frac{1}{\varepsilon_{xx}} \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial H_y}{\partial \tau} &= \frac{\partial E_x}{\partial z}; \\ \frac{\partial H_z}{\partial \tau} &= -\frac{\partial E_x}{\partial y}. \end{aligned} \right. (2)$$

Будем полагать, что на границе $E_x = 0$. Это справедливо, например, для планарного волновода, заключенного в металлическую оболочку. Такой волновод будет соответствовать волноводу без оболочки в случае, если:

- изгиб не превышает критического угла α , который соответствует переходу возбужденной моды высшего порядка в первую воздушную радиационную моду;
- неоднородностями показателя преломления, которые вызывают появление воздушных мод, можно пренебречь.

2. Метод «push-pull» численного решения уравнений Максвелла

Будем решать систему (2) посредством конечных разностей. Для этого рассмотрим множество функций $E_x(z, y, \tau)$, $H_y(z, y, \tau)$, $H_z(z, y, \tau)$ в области

$$D = \left\{ 0 \leq z \leq L, -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2}, 0 \leq \tau \leq T \right\},$$

где L – длина волновода, d – ширина волновода, $T = ct_1$, t_1 – длительность эксперимента.

Определим на ней сетку:

$$\omega_{\Delta z \Delta y \Delta \tau} = \left\{ (z_i, y_j, \tau_n) \in D \right\}$$

где (z_i, y_j, τ_n) – узлы сетки, причем

$$0 \leq i \leq N_1 - 1;$$

$$0 \leq j \leq N_2 - 1;$$

$$0 \leq n \leq N_3 - 1.$$

Шаги сетки определяются формулами:

$$\Delta z = \frac{L}{N_1 - 1};$$

$$\Delta y = \frac{d}{N_2 - 1};$$

$$\Delta \tau = \frac{T}{N_3 - 1}.$$

В уравнениях Максвелла (2) произведем расщепление

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial \tau} = \frac{1}{n^2(y)} \frac{\partial H_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial E_x}{\partial \tau} = \frac{1}{n^2(y)} \frac{\partial H_z}{\partial y}; \\ \frac{\partial H_y}{\partial \tau} = \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z}; \\ \frac{\partial H_z}{\partial \tau} = -\frac{\partial E_x}{\partial y}, \end{array} \right. \quad (3)$$

где $n^2(y) = \varepsilon_{xx}$.

Основываясь на общих принципах, изложенных в [2], построим неявную разностную схему расщепления. Запишем систему разностных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{E}_{x_{i,j}}^{n+1} - E_{x_{i,j}}^n}{\Delta \tau} = \frac{1}{n^2(y)} \frac{H_{y_{i,j}}^{n+1} - H_{y_{i-1,j}}^{n+1}}{\Delta z}; \\ \frac{E_{x_{i,j}}^{n+1} - \tilde{E}_{x_{i,j}}^{n+1}}{\Delta \tau} = -\frac{1}{n^2(y)} \frac{H_{z_{i,j}}^{n+1} - H_{z_{i,j-1}}^{n+1}}{\Delta y}; \\ \frac{H_{y_{i,j}}^{n+1} - H_{y_{i,j}}^n}{\Delta \tau} = \frac{\tilde{E}_{x_{i+1,j}}^{n+1} - \tilde{E}_{x_{i,j}}^{n+1}}{\Delta z}; \\ \frac{H_{z_{i,j}}^{n+1} - H_{z_{i,j}}^n}{\Delta \tau} = -\frac{E_{x_{i,j+1}}^{n+1} - E_{x_{i,j}}^{n+1}}{\Delta y}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Система (4) аппроксимирует (3) в узлах (z_i, y_j, τ_n) при значениях индексов:

$$0 \leq i \leq N_1 - 1;$$

$$1 \leq j \leq N_2 - 1;$$

$$0 \leq n \leq N_3 - 1.$$

Подставив третье уравнение системы (4) в первое и четвертое во второе, получим разностные уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta \tau}{n^2(y) \Delta z^2} \tilde{E}_{x_{i-1,j}}^{n+1} + \left(-\frac{1}{\Delta \tau} - 2 \frac{\Delta \tau}{n^2(y) \Delta z^2} \right) \tilde{E}_{x_{i,j}}^{n+1} + \\ & + \frac{\Delta \tau}{n^2(y) \Delta z^2} \tilde{E}_{x_{i+1,j}}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta \tau} E_{x_{i,j}}^n - \\ & - \frac{1}{n^2(y) \Delta z} H_{y_{i,j}}^n + \frac{1}{n^2(y) \Delta z} H_{y_{i-1,j}}^n; \\ & \frac{\Delta \tau}{n^2(y) \Delta y^2} E_{x_{i,j-1}}^{n+1} + \left(-\frac{1}{\Delta \tau} - 2 \frac{\Delta \tau}{n^2(y) \Delta y^2} \right) E_{x_{i,j}}^{n+1} + \\ & + \frac{\Delta \tau}{n^2(y) \Delta y^2} E_{x_{i,j+1}}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta \tau} \tilde{E}_{x_{i,j}}^{n+1} - \\ & - \frac{1}{n^2(y) \Delta y} H_{z_{i,j}}^n + \frac{1}{n^2(y) \Delta y} H_{z_{i,j-1}}^n, \end{aligned}$$

которые решаются методом прогонки.

В узлах (x_i, y_j, τ_k) при значениях индексов:

$$0 \leq i \leq N_1 - 1;$$

$$j = 0;$$

$$0 \leq n \leq N_3 - 1$$

построим альтернативную систему аппроксимирующих уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{E}_{x_{i,j}}^{n+1} - E_{x_{i,j}}^n}{\Delta \tau} = \frac{1}{n^2(y)} \frac{H_{y_{i+1,j}}^{n+1} - H_{y_{i,j}}^{n+1}}{\Delta z}; \\ \frac{E_{x_{i,j}}^{n+1} - \tilde{E}_{x_{i,j}}^{n+1}}{\Delta \tau} = -\frac{1}{n^2(y)} \frac{H_{z_{i,j+1}}^{n+1} - H_{z_{i,j}}^{n+1}}{\Delta y}; \\ \frac{H_{y_{i,j}}^{n+1} - H_{y_{i,j}}^n}{\Delta \tau} = \frac{\tilde{E}_{x_{i,j}}^{n+1} - \tilde{E}_{x_{i-1,j}}^{n+1}}{\Delta z}; \\ \frac{H_{z_{i,j}}^{n+1} - H_{z_{i,j}}^n}{\Delta \tau} = -\frac{E_{x_{i,j}}^{n+1} - E_{x_{i,j-1}}^{n+1}}{\Delta y}. \end{array} \right. \quad (5)$$

Подставив третье уравнение системы (5) в первое и четвертое во второе, получим разностные уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta \tau}{n^2(y) \Delta z^2} \tilde{E}_{x_{i-1,j}}^{n+1} + \left(-\frac{1}{\Delta \tau} - 2 \frac{\Delta \tau}{n^2(y) \Delta z^2} \right) \tilde{E}_{x_{i,j}}^{n+1} + \\ & + \frac{\Delta \tau}{n^2(y) \Delta z^2} \tilde{E}_{x_{i+1,j}}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta \tau} E_{x_{i,j}}^n - \\ & - \frac{1}{n^2(y) \Delta z} H_{y_{i+1,j}}^n + \frac{1}{n^2(y) \Delta z} H_{y_{i,j}}^n; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta\tau}{n^2(y)\Delta y^2} E_{x_{i,j-1}}^{n+1} + \left(-\frac{1}{\Delta\tau} - 2\frac{\Delta\tau}{n^2(y)\Delta y^2} \right) E_{x_{i,j}}^{n+1} + \\ & + \frac{\Delta\tau}{n^2(y)\Delta y^2} E_{x_{i,j+1}}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta\tau} \tilde{E}_{x_{i,j}}^{n+1} - \\ & - \frac{1}{n^2(y)\Delta y} H_{z_{i,j+1}}^n + \frac{1}{n^2(y)\Delta y} H_{z_{i,j}}^n, \end{aligned}$$

так же решаемые методом прогонки.

Теперь зная электрическое поле определим магнитное как

$$\begin{cases} \frac{H_{y_{i,j}}^{n+1} - H_{y_{i,j}}^n}{\Delta\tau} = \frac{E_{x_{i+1,j}}^{n+1} - E_{x_{i,j}}^{n+1}}{\Delta z}; \\ \frac{H_{z_{i,j}}^{n+1} - H_{z_{i,j}}^n}{\Delta\tau} = -\frac{E_{x_{i,j+1}}^{n+1} - E_{x_{i,j}}^{n+1}}{\Delta y} \end{cases}$$

при значениях индексов:

$$0 \leq i \leq N_1 - 1;$$

$$1 \leq j \leq N_2 - 1;$$

$$0 \leq n \leq N_3 - 1$$

и

$$\begin{cases} \frac{H_{y_{i,j}}^{n+1} - H_{y_{i,j}}^n}{\Delta\tau} = \frac{E_{x_{i,j}}^{n+1} - E_{x_{i-1,j}}^{n+1}}{\Delta z}; \\ \frac{H_{z_{i,j}}^{n+1} - H_{z_{i,j}}^n}{\Delta\tau} = -\frac{E_{x_{i,j}}^{n+1} - E_{x_{i,j-1}}^{n+1}}{\Delta y} \end{cases}$$

при значениях индексов:

$$0 \leq i \leq N_1 - 1;$$

$$j = 0;$$

$$0 \leq n \leq N_3 - 1.$$

Возьмем в качестве граничного условия $E_x|_{\Gamma} = 0$ и торцевого условия

$$E_x = A(y) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \text{ где } A - \text{ действительная}$$

амплитуда волны в скалярном приближении.

В системе (4) аппроксимации пространственных производных в первых двух уравнениях являются левыми, а во вторых двух уравнениях - правыми. В системе (5) наоборот. Поэтому (4) и (5) можно условно назвать схемой «push-pull». Она позволяет отказаться от использования краевых условий для магнитного поля, что существенно упрощает задачу.

Схема (4), (5) аппроксимируют краевую задачу (2) с погрешностью аппроксимации $O(\Delta\tau, \Delta z, \Delta y)$. Доказательство этого не является предметом рассмотрения данной статьи.

3. Результаты численного моделирования распространения излучения

Построим примеры для тестирования полученной разностной схемы и представим практические приложения.

Пример 1. Для планарного вакуумного волновода с металлическими стенками модой будет являться следующая TE волна [3]:

$$\begin{cases} E_x = \cos(ay) \cdot \cos(\sqrt{k^2 - a^2}z - \omega t) \\ H_y = -\frac{1}{k} \sqrt{k^2 - a^2} \cdot \cos(ay) \cdot \cos(\sqrt{k^2 - a^2}z - \omega t) \\ H_z = -\frac{1}{k} a \cdot \sin(ay) \cdot \sin(\sqrt{k^2 - a^2}z - \omega t) \end{cases} \quad (6)$$

где k -волновое число, $a = \frac{2\pi}{d}$.

Зададим начальные условия, приняв в (6) $t=0$. На рисунке 1 представлен результат, полученный численно для значений параметров: $t = 1 \cdot 10^{-11}$ с, $\Delta t = 4.2 \cdot 10^{-15}$ с, $d=60$ мкм, $L=3$ мкм, $\Delta x = 2.36 \cdot 10^{-2}$ мкм, $\Delta y = 1.935$ мкм, $\lambda=0.63$ мкм.

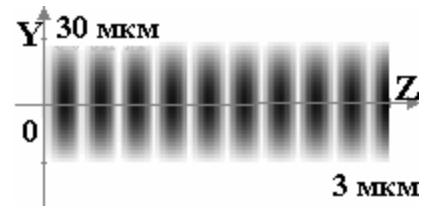


Рис.1. Численное моделирование распространения моды (6) в вакуумном волноводе.

Визуально результат соответствует ожидаемому представлению электрической составляющей в виде косинусоиды. Численный анализ показывает наличие погрешности, зависящей от величин шагов дискретизации $\Delta\tau, \Delta z, \Delta y$.

Пример 2. Рассмотрим распространение той же волны [3] с теми же параметрами дискретизации в стекле с показателем преломления $n=1.458$, полагая, что волна падает из вакуума на полубесконечный стеклянный волновод.

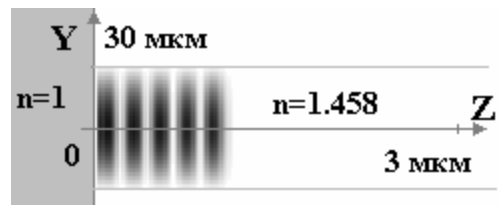


Рис.2. Численное моделирование распространения моды (6) в стеклянном волноводе с показателем преломления $n=1.458$.

Из рисунка 2 можно заметить изменение формы импульса, обусловленное отличием скорости света в стекле относительно вакуума в п

раз. Изменение состоит в том, что импульсы сжимаются пропорционально σ .

Пример 3. Проследим распространение моды Гаусса-Лагерра [4]

$$\Psi_1 = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} L_1^0 \left(\frac{2y^2}{\sigma^2} \right)$$

в волноводе с градиентным профилем показателя преломления

$$n^2(y) = n_1^2 \left(1 - 2\Delta \left(\frac{y}{d} \right)^2 \right),$$

где L_1^0 - обобщенный полином Лагерра, эффективный радиус моды $\sigma=5.6$ мкм, $n_1=1.458$, $\Delta=0.009$, $d=60$ мкм.

Шаги дискретизации возьмем следующими: $\Delta t = 4.2 \cdot 10^{-15}$ с, $d=60$ мкм, $L=3$ мкм, $\Delta x = 1.003 \cdot 10^{-2}$ мкм, $\Delta y = 4.72 \cdot 10^{-1}$ мкм, $\lambda=0.63$ мкм. $t = 1 \cdot 10^{-11}$. Результат моделирования представлен на рисунке 3.

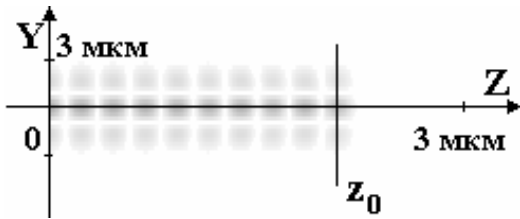


Рис.3. Распространение моды Гаусса-Лагерра в волноводе с градиентным показателем преломления.

Для визуальной наглядности рассмотрим распределение амплитуды на входном торце волновода ($z=0$), представленное на рисунке 4 и в волноводе ($z=z_0$), представленное на рисунке 5.

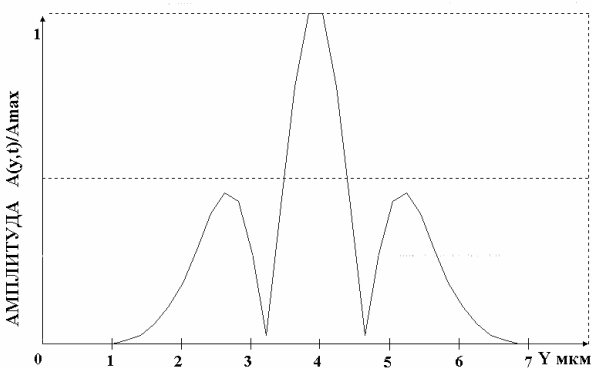


Рис.4. Распределение амплитуды моды Гаусса-Лагерра на входном торце градиентного волновода.

Из графиков видно, что мода сохранила характерные максимумы, хотя максимальное значение амплитуды несколько уменьшилась. Это связано с наличием погрешности дискретизации. Ширина волновода составляет 60 мкм в то время, как эффективный радиус моды Гаусса-Лагерра - 5.6 мкм, поэтому из 200 точек дискретизации по оси Y только 18 несут информацию о моде. При увеличении числа точек дискретизации возрастают затраты времени. В рассматриваемом случае численный эксперимент длился 14 часов на компьютере Pentium II с тактовой частотой 233 МГц. Необходимо отметить, что с уменьшением шага дискретизации точность эксперимента повышается.

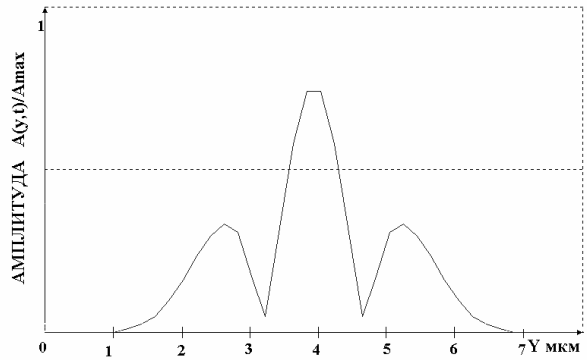


Рис.5. Распределение амплитуды моды Гаусса-Лагерра в градиентном волноводе ($z=z_0$).

Пример 4. Рассмотрим прохождение ТЕ поляризованной волны ($\lambda=1$ мкм) по планарному волноводу через цилиндрическую фокусирующую линзу. На рисунке 6 представлен результат численного моделирования для линзы, радиус кривизны которой 5 мкм, апертура 8 мкм, фокусное расстояние для данной длины волны 5 мкм, показатель преломления равен 2, а волна содержит 8 цугов. Заметим, что волновой фронт после линзы является сферическим. Распределение интенсивности в фокальной плоскости линзы представлено на рисунке 7.

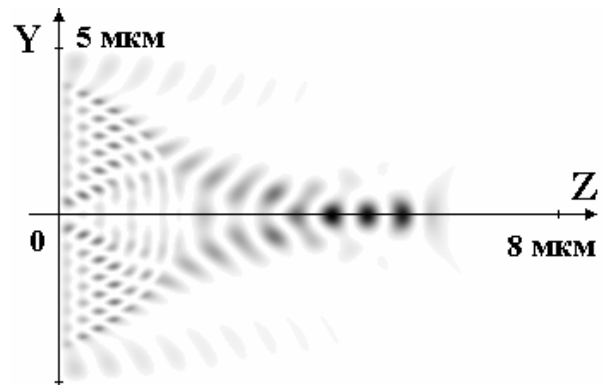


Рис.6. Распределение интенсивности света в меридиональном сечении цилиндрической линзы.

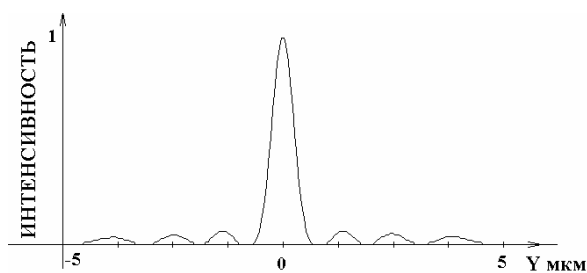


Рис.7. Распределение интенсивности света в фокальной плоскости цилиндрической линзы.

Пример 5. Заменяем линзу дифракционным оптическим элементом с двумя градациями, как показано на рисунке 8.

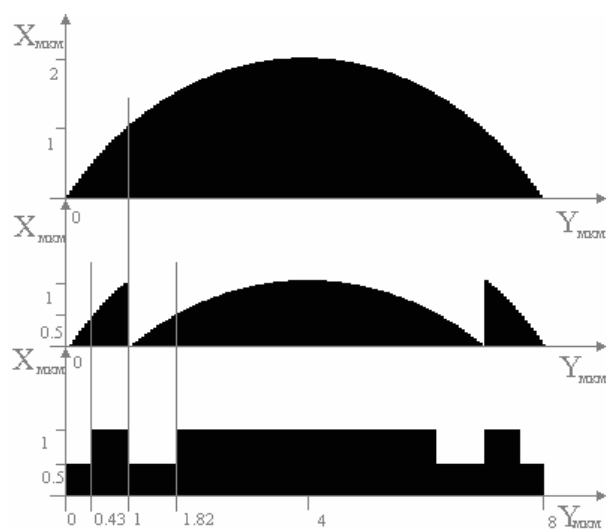


Рис.8. Синтез дифракционной линзы.

Результаты численного моделирования представлены на рисунках 9,10.

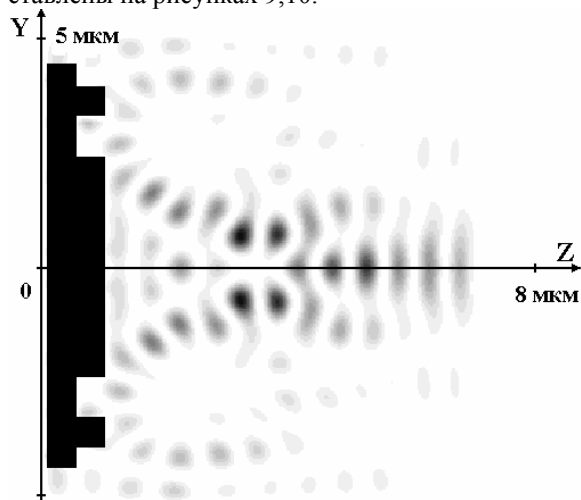


Рис.9. Распределение интенсивности света в меридиональном сечении дифракционной линзы.

Необходимо отметить, что интенсивность, представленная на рисунках 7, 10, не является интегральной интенсивностью, характеризующей эффективность оптических элементов.

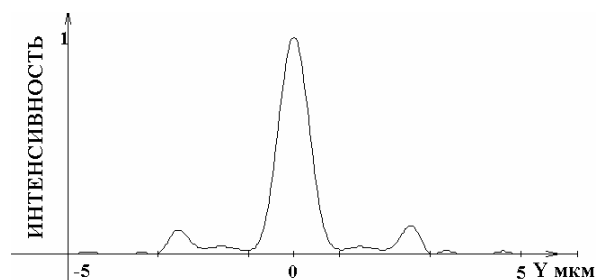


Рис.10. Распределение интенсивности света в фокальной плоскости цилиндрической дифракционной линзы.

4. Заключение

В представленной работе предложен численный метод решения системы уравнений Максвелла и проведено его тестирование. Изложенный метод может использоваться для решения широкого класса задач дифракционной и интегральной оптики. Однако необходимо отметить некоторые недостатки. К ним относятся низкий порядок аппроксимации разностной схемой исходной задачи и значительные затраты вычислительных ресурсов, что, в частности, не позволяет использовать метод для расчета полей в волноводах большой протяженности. Дальнейшую работу авторы видят в модификации метода «push-pull» с целью повышения его точности; применении метода для исследования системы двух скрещенных цилиндрических линз, сферической линзы; создания рекурсивного метода расчета поля в волноводах большой протяженности.

Благодарность

Авторы благодарят В.В. Котляра и С.И. Харитонову за помощь в работе и обсуждение результатов.

Список литературы

1. **Chu S.T., Huang W.P., Chaudhuri S.K.**, Simulation and analysis of waveguide based optical integrated circuits, Computer Physics Communications, 68,1991.
2. **Самарский А.А.**, Теория разностных схем, М. «Наука», 1989.
3. **Солимено С., Крозиньяни Б., Ди Порто П.**, Дифракция и волноводное распространение оптического излучения, М. «Мир», 1984.
4. **Soifer V.A., Golub M.A.**, Laser Beam Mode Selection by Computer Generated Holograms, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1994.