

ДИФРАКЦИЯ НА КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ОДНОМЕРНЫХ СТРУКТУРАХ

С. И. Харитонов

Институт систем обработки изображений РАН

Введение

В последнее время широкое распространение получили дифракционные оптические элементы, фокусирующие когерентное излучение в заданную область с заданным распределением интенсивности [1,2]. Появился широкий спектр работ посвященный, как вычислению светового поля, создаваемого подобными оптическими элементами, так и решению обратных задач дифракции. Во многих работах при решении задач дифракции используется приближение геометрической оптики. Приближение геометрической оптики справедливо в случае, если ширина зоны или размер одного штриха (при решении задач итерационными методами) на оптическом элементе составляют несколько десятков длин волн. Это условие часто не выполняется в случае короткофокусных дифракционных оптических элементов, для расчета которых необходимо использовать более точное электромагнитное приближение. В настоящее время в электромагнитном приближении решены задачи дифракции света на простейших структурах: дифракционных решетках [1-4], шаре [4], цилиндре, круглом отверстии в металлическом экране. Это в первую очередь связано с тем, что расчет поля от более сложных пространственных структур требует больших вычислительных затрат. В связи с этим большую роль в теории дифракции играют асимптотические методы. В данной работе предложен асимптотический метод оценки поля при дифракции на бинарной квазипериодической структуре, представляющей совокупность дифракционных решеток с различным периодом. Получены удобные представления для волновых полей. Данный подход может быть эффективен при расчете поля от дифракционных оптических элементов.

Асимптотическая оценка поля при дифракции на одномерной бинарной квазипериодической структуре

Рассмотрим одномерную структуру, представляющую совокупность дифракционных решеток. Введем условные обозначения. Пусть X_M границы локальных решеток, N_M - число периодов M -ной дифракционной решетки. Если N_M стремится к бесконечности, то квазипериодическая структура превращается в строго периодическую дифракционную решетку, если $N_M = 1$, все периоды квазипериодической структуры имеют различный период. Пусть x_m - границы периода локальной решетки (для границ периодов используется сплошная нумерация, независимо от того какой решетке принадлежит данный период), $d_m = x_{m+1} - x_m$. Не ограничивая общности подхода, рассмотрим дифракционную решетку с одним пикселем на периоде [1] (см рис 1), c_m - ширина штриха, h его глубина. Пусть плоская волна $\exp(ik(\alpha_0 x - \beta_0 z))$ падает на описанную выше квазипериодическую структуру.

Рассмотрим две области:

Первая область $z > 0$, вторая область $z < 0$.

Поле в первой области представляет собой совокупность плоских волн

$$W(x, z) = \exp(ik(\alpha_0 x - \beta_0 z)) + \overline{W}(x, z)$$

$$\overline{W}(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) \exp(ik(\alpha x + \beta z)) d\alpha, \quad (1)$$

где

$$\beta = \sqrt{1 - \alpha^2} \quad (2)$$

Нормальная производная поля

$$\frac{\partial W(x, z)}{\partial z} = -ik\beta_0 \exp(ik(\alpha_0 x - \beta_0 z)) + \int_{-\infty}^{\infty} ik\beta(\alpha) A(\alpha) \exp(ik(\alpha x + \beta z)) d\alpha \quad (3)$$

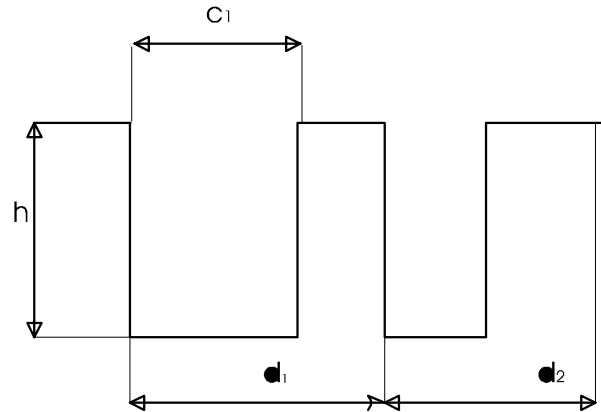


Рис. 1. Структура периода решетки.

$A(\alpha)$ представляет спектр пространственных частот волн отраженных от структуры. $|\alpha| < 1$ соответствует однородным плоским волнам, $|\alpha| > 1$ соответствует неоднородным плоским волнам, амплитуда которых убывает при удалении от поверхности квазипериодической структуры. Спектральная функция выражается через отраженное поле на поверхности следующим образом

$$A(\alpha) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{W}(x,0) \exp(-ik\alpha x) dx \quad (4)$$

Пусть отраженное поле на поверхности структуры представляется в виде

$$\overline{W}(x) = \exp(ik\alpha_0 x) \sum_m \sum_n R_n^m \times \exp\left\{ ik \frac{\lambda n}{d_m} (x - x_m) \right\} \text{rect}(x, x_m, x_{m+1}) \quad (5)$$

$$\text{rect}(x, a, b) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [a, b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (6)$$

Данное представление поля на поверхности удобно тем, что по форме совпадает с представлением отраженного поля в случае дифракции на строго периодической структуре [1]. Нахождение поля на поверхности сводится к определению дифракционных коэффициентов R_n^m . Далее будет показано, что в асимптотике выражения для дифракционных коэффициентов в квазипериодическом случае совпадают с коэффициентами, вычисленными для строго периодической решетки с параметрами d_m, c_m . Этот результат является основным для асимптотической оценки поля при дифракции на квазипериодической структуре.

Суммарное поле и его нормальная производная для случая ТЕ поляризации (формулы для ТМ поляризации можно получить по аналогии) при $z < 0$ представляются в виде

$$W = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu}^k \sin\left(\frac{\pi\mu(x-x_k)}{c_k}\right) \times \sin(\Gamma_{\mu}^k(z+h)) S^k(x) \quad (7)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \sum_k \sum_{\mu} a_{\mu}^k \Gamma_{\mu}^k \sin\left(\frac{\pi\mu(x-x_k)}{c_k}\right) \times \cos(\Gamma_{\mu}^k(z+h)) S^k(x) \quad (8)$$

$$\Gamma_{\mu}^k = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi\mu}{c_k}\right)^2} \quad (9)$$

$$S^k(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [x_k, x_k + c_k] \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad (10)$$

По аналогии с [1] запишем условия непрерывности поля и его нормальной производной на границе раздела между поверхностью дифракционной решетки и свободным полупространством:

$$\exp(ik\alpha_0 x) \left(1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_n^m \Phi_n^m(x) \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu}^k \sin\left(\frac{\pi\mu(x-x_k)}{c_k}\right) \sin(\Gamma_{\mu}^k h) S^k(x) \quad (11a)$$

$$\sum_s ik \exp(ik\alpha_0 x) \times \left(-\beta(\alpha_0) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_m R_n^m F_n^m(x) \right) S^s(x) = \sum_k \left(\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu}^k \sin\left(\frac{\pi\mu(x-x_k)}{bd_k}\right) \times \Gamma_{\mu}^k \cos(\Gamma_{\mu}^k h) \right) S^k(x) \quad (11b)$$

где

$$\Phi_n^m = \exp\left(\frac{ik\lambda n}{d_m}(x-x_m)\right) \times \text{rect}(x, x_m, x_{m+1}) \quad (12)$$

$$F_n^m(x) = \widehat{F}_n^m(x) + \widetilde{F}_n^m(x) \quad (13)$$

$$\widehat{F}_n^m(x) = \beta(\alpha_n^m) \Phi_n^m(x) \quad (13)$$

$$\widetilde{F}_n^m(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\beta(\alpha) - \beta(\alpha_n^m)) \times \left[\frac{\exp(ik(\alpha - \alpha_0)(x - x_{m+1}))}{(\alpha - \alpha_0) - \frac{\lambda n}{d_m}} - \frac{\exp(ik(\alpha - \alpha_0)(x - x_m))}{(\alpha - \alpha_0) - \frac{\lambda n}{d_m}} \right] d\alpha \quad (14)$$

$$\alpha_n^m = \alpha_0 + \frac{\lambda n}{d_m} \quad (15)$$

Систему функциональных уравнений (11) можно привести к системе линейных уравнений

$$M^{k_{pn}} R_n^k = D^k_p \quad (16)$$

$$M^{k_{pn}} = iA^{k_{pn}} + kd_k \delta_{pn} \quad (17)$$

$$D^k_p = iA^{k_{p0}} - kd_k \delta_{p0} - B^k_p \quad (18)$$

$$A^{k_{pn}} = \sum \frac{\text{tg}(\Gamma_{\mu}^k h)}{N_{\mu}^k \Gamma_{\mu}^k} \beta(\alpha_n^k) D^k_{n\mu} \overline{D}^k_{p\mu} \quad (19)$$

$$D^k_{n\mu} = \int_{x_k}^{x_k+c_k} \exp(ik(\alpha_0 x + \lambda n/d_k(x-x_k))) \times \sin\left(\frac{\pi\mu(x-x_k)}{c_k}\right) dkx \quad (20)$$

$$B^k_p = \sum \frac{\text{tg}(\Gamma_{\mu}^k h)}{N_{\mu}^k \Gamma_{\mu}^k} \beta(\alpha_n^k) \Delta_{\mu}^k \overline{D}^k_{p\mu} \quad (21)$$

$$\Delta_{\mu}^k = ik \int_{x_k}^{x_k+c_k} \sum_n \exp(ik\alpha_0 x) \quad (22)$$

$$\tilde{F}_n(x) \sin\left(\frac{\pi\mu(x-x_k)}{c_k}\right) dx$$

$$\tilde{F}_n(x) = \sum_m R_n^m \tilde{F}_n^m(x) \quad (23)$$

Полученная система содержит бесконечное число линейных уравнений. Для нахождения дифракционных коэффициентов необходимо оставить конечное число линейных уравнений. Пусть $N = \max(k)$ - максимальное число периодов, $P = \max(n)$ - максимальное число порядков. В этом случае размерность системы уравнений равна $N \times P$. При большом числе периодов решение системы требует значительных вычислительных ресурсов. Кроме того, возникает проблема устойчивости полученного решения. Этого можно избежать, если проанализировать структуру системы уравнений и ограничиться нахождением коротковолновой асимптотики.

Выражение (23) описывает влияние различных периодов квазипериодической структуры. Анализируя систему уравнений (16) отметим, если для каких либо параметров структуры $\tilde{F}_n(x) = \sum R_n^m \tilde{F}_n^m(x) \rightarrow 0$, то межзонное взаимо-

действие стремится к нулю и система (16) распадается на N независимых систем уравнений, каждая из которых имеет размерность P . Каждая из этих подсистем уравнений совпадает с системой уравнений полученной в случае решения задачи дифракции на решетке с параметрами $d_m = x_{m+1} - x_m$, c_m, h_m . Это позволяет уменьшить вычислительную ошибку и в дальнейшем получить удобные выражения для асимптотической оценки поля.

Для дальнейших рассуждений введем несколько вспомогательных непрерывных функций $\varphi(x)$, $R_n(x)$, $\alpha_n(x)$. Функция $\varphi(x)$ определяет границы зон квазипериодической решетки $\varphi(x_m) = m\Lambda$, где Λ - параметр квазипериодической структуры (при $\Lambda \rightarrow 0$ границы зон стремятся друг к другу).

$$R_n(x_m) = R_n^m, \alpha_n(x_m) = \alpha_n^m$$

Перепишем $\tilde{F}_n(x)$ в следующем виде

$$\tilde{F}_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_m \left[\frac{\beta(\alpha) - \beta(\alpha_n^{m+1})}{\alpha - \alpha_n^{m+1}} \times \right. \\ \left. \times R_n^{m+1} - \frac{\beta(\alpha) - \beta(\alpha_n^m)}{\alpha - \alpha_n^m} R_n^m \right] \times \\ \times \exp(ik(\alpha - \alpha_0)(x - x_{m+1})) da \quad (24)$$

Рассмотрим предельные случаи, когда влиянием соседних периодов можно пренебречь т.е. $\tilde{F}_n(x) \rightarrow 0$

1. Периодическая структура $\alpha_n^m = \alpha_n^{m+1}$
 $R_n^m = R_n^{m+1}$.

В этом случае из формулы (24) следует, что $\tilde{F}_n(x)$ тождественно равна нулю.

2. Длина волны освещающего пучка стремится к нулю $\lambda \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), Λ остается конечной

В этом случае мы имеем Фурье преобразование (по переменной α) от низкочастотной функции. При $k(x - x_{m+1}) \rightarrow \infty$ значение фуре образа стремится к нулю.

3. $\Lambda \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, но $k\Lambda$ остается конечной величиной.

Докажем, что

$$\sum_m \left[\frac{\beta(\alpha) - \beta(\alpha_n^{m+1})}{\alpha - \alpha_n^{m+1}} R_n^{m+1} - \right. \\ \left. - \frac{\beta(\alpha) - \beta(\alpha_n^m)}{\alpha - \alpha_n^m} R_n^m \right] \times \\ \times \exp(ik(\alpha - \alpha_0)(x - x_{m+1})) \rightarrow 0 \quad (25)$$

Доказательство утверждения сводится к доказательству предельной формулы

$$\sum_m \left[R\left(\frac{x_{m+2} - x_{m+1}}{\Lambda}\right) - R\left(\frac{x_{m+1} - x_m}{\Lambda}\right) \right] \times \\ \times \exp\left(\frac{2\pi i p x_{m+1}}{\Lambda}\right) \rightarrow 0$$

при $\Lambda \rightarrow 0$,

где

$\varphi(x_m) = \Lambda m R(x)$ - произвольная функция.

Строгое доказательство можно провести только в случае равноотстоящих зон, однако численный анализ показывает справедливость данного утверждения для широкого класса последовательностей x_m и функций $R(x)$.

Рассмотрим случай малых Λ и получим в этом случае удобное выражение для амплитуды вблизи поверхности квазипериодической структуры. Если функция $\varphi(x)$ монотонна и дифференцируема, то в пределах отрезка $[x_m, x_{m+1}]$ справедлива линейная

аппроксимация $\varphi(x) = m\Lambda + \frac{\Lambda(x - x_m)}{d_m}$, где

$d_m = x_{m+1} - x_m$, тогда подставляя эту аппроксимацию в (5) получим представление:

$$\bar{W}(x) = \exp(ik\alpha_0 x) \sum_m \sum_n R_n^m \times \\ \times \exp\left(ik \frac{\lambda n}{\Lambda} \varphi(x)\right) \text{rect}(x, x_m, x_{m+1})$$

Нетрудно заметить, что знак суммы можно убрать и поле на поверхности квазипериодической структуры представляется в виде.

$$\bar{W}_0(x) = \exp(ik\alpha_0 x) \times \\ \times \sum_n R_n(x) \exp\left(ik \frac{\lambda n}{\Lambda} \varphi(x)\right) \quad (26)$$

Здесь рассмотрен случай чистой ТЕ или ТМ – поляризации. Формулы для смешанной поляризации приведены в приложении.

Поле в полупространстве имеет вид

$$W(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \bar{x}, z) \mathcal{W}_0(\bar{x}) d\bar{x} \\ G(x, z) = \frac{1}{2i} \frac{\partial H_0^1(k\sqrt{x^2 + z^2})}{\partial z} \quad (27)$$

Подставляя (26) в (27) получим окончательное выражение для поля везде при $z > 0$

$$\bar{W}(x, z) = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} R_n(\bar{x}) G(x - \bar{x}, z) \times \\ \times \exp\left(ik\alpha_0 \bar{x} + ik \frac{\lambda n}{\Lambda} \varphi(\bar{x})\right) d\bar{x} \quad (28)$$

С формальной точки зрения данный подход аналогичен методу нелинейного предсказания, изложенного в работе [5]. Отличие состоит в том, что в этой работе дифракционные коэффициенты были найдены исходя из геометрооптической аппроксимации поля внутри штрихов дифракционной решетки, которая справедлива, если период решетки составляет несколько десятков длин волн. В свете нового подхода дифракционные коэффициенты могут быть найдены из строгой теории дифракции. В электромагнитном приближении значения коэффициентов будут зависеть от типа поляризации и относительной ориентации векторов поляризации и направления штрихов в решетке. Существенное отличие выражения (28) от формул, полученных с помощью метода нелинейного предсказания, состоит в наличии зависимости дифракционных коэффициентов от координат.

В качестве примера рассмотрим вычисление поля от бинарной квазипериодической структуры, границы зон которой определяются формулой $\varphi(x_m) = m\Lambda$, где $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = x \sin \omega + \\ + \sqrt{(x - f \sin \mu)^2 + f^2 \cos^2 \mu} \quad (29)$$

Для того, чтобы использовать (28) для нахождения поля в полупространстве, необходимо определить функцию $R_n(x)$. Для ее определения необходимо использовать значения дифракционных коэффициентов $R_n^m = Q_n(\lambda/d_m)$, которые находятся из системы (16).

$$R_n(x) = Q_n(\lambda/d_m) \quad (30)$$

где

$$\frac{\Lambda}{d_m} = \frac{(x - f \sin \mu)}{\sqrt{(x - f \sin \mu)^2 + f^2 \cos^2 \mu}} + \sin \omega \quad (31)$$

График функции

$$\bar{Q}(\lambda/d_m) = \frac{\sqrt{1 - (\alpha_0 - \lambda_o/d_m)^2}}{\sqrt{1 - \alpha_o^2}} Q_{-1} \times$$

$$\times (\lambda/d_m)$$

$$0.8 < \lambda/d_m < 1.8$$

$$\alpha_0 = \sin \omega$$

$$\omega = 45^\circ$$

для ТМ-поляризации приведен в работе [6]. Из результатов, приведенных в работе также видно, что $Q_n = 0$, если $n \neq -1, 0$. Функцию Q_0 можно найти из закона сохранения энергии $Q_{-1}^2 + Q_0^2 = 1$.

Подставляя (30) в (28) и вычисляя полученные интегралы методом стационарной фазы [7], получим выражение для поля во всем полупространстве $z > 0$ (кроме окрестностей каустик). Анализ, проведенный на основе метода стационарной фазы, показывает, что данная квазипериодическая структура фокусирует падающее излучение в точку с координатами $(f \sin \mu, f \cos \mu)$.

В заключении отметим, что результаты полученные в данной работе нетрудно распространить на случай дифракции любых волновых полей на квазипериодических двумерных структурах. Примерами двумерных квазипериодических структур являются фокусаторы лазерного излучения [8,9]. Асимптотические представления для волновых полей можно использовать для решения задач синтеза короткофокусных дифракционных оптических элементов с высокой пространственной частотой микрорельефа.

Приложение

Асимптотики поля в случае смешанной поляризации

Рассмотрим отражение плоской электромагнитной волны от идеально проводящей квазипериодической структуры. Чтобы упростить рассуждения рассмотрим одномерный случай.

Введем систему координат x_n, x_N, x_τ . Орты координатных осей обозначим следующим образом:

\vec{N} - перпендикулярен к плоскости оптического элемента;

$\vec{\tau}$ - совпадает с касательной к зоне;

\vec{v} - перпендикулярен зоне и лежит в плоскости оптического элемента.

Пусть плоская волна $\exp(ik(\alpha_0 x_v - \beta_0 x_N + \gamma x_\tau))$ падает на одномерный оптический элемент (см. рис. 2), границы зон x_m , которого определяются из уравнения $\bar{\varphi}(x_m) = m\lambda$, $m = 1, 2, \dots$. Следует отметить, что в пределах зоны приблизительно выполняются соотношения

$$\nabla \bar{\varphi} = \lambda / d_m \quad \bar{\varphi}(x) = m\lambda + \nabla \bar{\varphi}(x - x_m). \quad (1\pi)$$

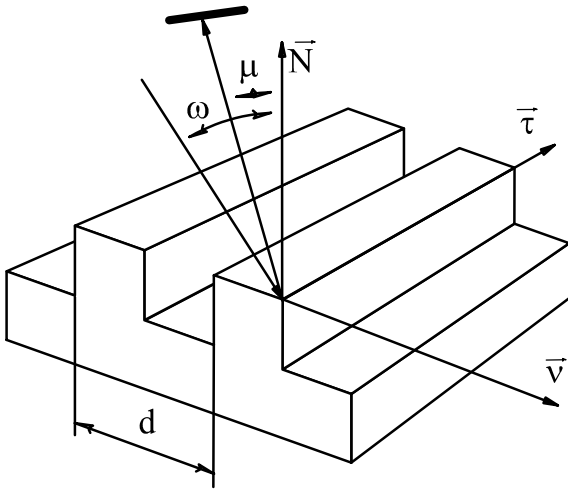


Рис.2. Дифракция на одномерной квазипериодической структуре.

Рассмотрим зону с номером m , расположенную в интервале $[x_m, x_{m+1}]$. Будем полагать, что поле в этой зоне при $z=0$ совпадает с полем дифракционной решетки, у которой микрорельеф на периоде совпадает с микрорельефом в данной зоне:

$$E_\tau(\vec{x}) = |E_\tau^0| \exp(ik\alpha_0 x_v + ik\gamma x_\tau) \times \sum_m \sum_n E_n^m \exp(ik \frac{\lambda n}{d_m} (x_v - x_m) + ik\beta_n x_N) \text{rect}(x_m, x_{m+1}) \quad (2\pi)$$

$$H_\tau(\vec{x}) = |H_\tau^0| \exp(ik\alpha_0 x_v + ik\gamma x_\tau) \times \sum_m \sum_n H_n^m \exp(ik \frac{\lambda n}{d_m} (x_v - x_m) + ik\beta_n x_N) \text{rect}(x_m, x_{m+1})$$

E_n^m, H_n^m -локальные дифракционные коэффициенты для ТЕ и ТМ поляризаций. Выражения для этих коэффициентов могут быть получены из решения задачи дифракции плоской волны на решетке, период которой совпадает с m -ной зоной на оптической элементе.

Далее получим формулы для проекций электрического и магнитного полей на нормаль к поверхности оптического элемента. Учитывая формулы, приведенные в работе [1]

$$E_N = \frac{i}{k(1-\gamma^2)} (\partial_v H_\tau - \gamma \partial_N E_\tau) \quad (3\pi)$$

$$H_N = \frac{i}{k(1-\gamma^2)} (\partial_v E_\tau + \gamma \partial_N H_\tau)$$

получим

$$E_N(\vec{x}) = -\sum_m \frac{\exp(ik\gamma x_\tau + ik\alpha_0 x_v)}{1-\gamma^2} - \sum (|H_\tau^0| H_n^m \alpha_n \times \gamma |E_\tau^0| E_n^m \beta_n) \times \exp(ik \frac{\lambda n}{d_m} (x_v - x_m) + ik\beta_n x_N) \text{rect}(x_m, x_{m+1})$$

$$H_N(\vec{x}) = -\sum_m \frac{\exp(ik\gamma x_\tau + ik\alpha_0 x_v)}{1-\gamma^2} \times \sum (|E_\tau^0| E_n^m \alpha_n + \gamma |H_\tau^0| H_n^m \beta_n) \times \exp(ik \frac{\lambda n}{d_m} (x_v - x_m) + ik\beta_n x_N) \text{rect}(x_m, x_{m+1}) \quad (4\pi)$$

подставляя $\gamma = (s\tau)$, где s - направление падающей волны, и предполагая непрерывную зависимость локальных решеток от координат, получаем окончательное выражение

$$E_N(\vec{x}) = -\frac{1}{(1-(s\tau)^2)} \times \sum (H_\tau^0 H_n \alpha_n - (s\tau) E_\tau^0 E_n \beta_n) \times \exp(ikn\bar{\varphi}) \quad (5\pi)$$

$$H_N(\vec{x}) = -\frac{1}{(1-(s\tau)^2)} \times \sum (E_\tau^0 E_n \alpha_n + (s\tau) H_\tau^0 H_n \beta_n) \times \exp(ikn\bar{\varphi})$$

В геометрической интерпретации это означает, что каждый луч, упавший на оптический элемент, разделяется на несколько лучей. Пусть I - плотность потока вектора Умова - Пойтинга через площадку, перпендикулярную направле-

нию луча. Тогда плотность потока вектора Умова - Пойтинга через плоскость оптического элемента,

$$I_n = I \frac{(\vec{v}\vec{s})^2 H_n^2 + (\vec{\tau}\vec{s})^2 (\vec{N}\vec{s})^2 E_n^2}{(1 - (\vec{s}\vec{\tau})^2)(1 - (\vec{s}\vec{N})^2)} \sqrt{1 - \alpha_n^2} \quad (6\text{п})$$

Направление луча определяется градиентом функции

$$\varphi_n = \alpha_0 x_v + \gamma x_\tau + n\bar{\varphi}(x). \quad (7\text{п})$$

Если магнитное поле в падающей волне и направление зон на оптическом элементе приблизительно совпадают, то выражение несколько упрощается и совпадает со скалярным случаем:

$$E_N(\vec{x}) = -\sum (H_\tau^0 H_n \alpha_n) \exp(ikn\bar{\varphi}) \quad \text{dc}$$

$$I_n = I H_n^2 \sqrt{1 - \alpha_n^2}. \quad (8\text{п})$$

Литература

1. Kok Y.L., Galagher Neal V. Relative phases of electromagnetic waves diffracted by a perfectly conducting rectangular-grooved grating // Journal of the Optical Society of America A. - 1988. - Vol.5, №1. - P. 65-73.
2. Applied optics v 34, N 14 1995.
3. JOSA v 12 N 5 1995.
4. М. Борн, Е. Вольф. Основы оптики, Москва, Наука, 1987, 720 стр.
5. Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, В.А. Соифер, С.И. Харитонов Дифракционный подход к синтезу многофункциональных фазовых элементов. Оптика и спектроскопия, 1992, о.73, аи.1, n.191-195.
6. Veldkamp W.B., Swanson G.C., Shaver D.C. High efficiency binary lenses // Optics Communications. - 1984. - Vol.5, №6. - P.353-358.
7. М. В. Федорюк. Асимптотики: Интегралы и ряды, Москва, Наука 1987, 544 стр..
8. Golub M.A., Sisakian I.N., Soifer V.A. Infra-red radiation focusators // Optics and Lasers in Engineering. - 1991. - Vol.15, №5. - P.297-309.
9. Soifer V.A., Golub M.A. Diffractive micro-optical elements with non-point response // Proceedings SPIE. - 1992. - Vol.1751. - P.140-154.