ДОЭ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ В ВИДЕ ЛИНИИ

Л.Л. Досколович, С.И.Харитонов, О.И. Петрова[+].
Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П.Королева,
Институт систем обработки изображений РАН
[+] Тольяттинский государственный университет

Аннотация

Рассмотрен расчет дифракционных оптических элементов, предназначенных для формирования однопараметрических диаграмм направленности (ДН), в приближении геометрической оптики. Проанализирован тип лучевой структуры поля при формировании диаграммы направленности в виде линии и предложены криволинейные координаты для расчета функции эйконала. В криволинейных координатах получено новое более простое выражение для функции эйконала. Приведены примеры расчета функции эйконала для формирования ДН в виде отрезка и дуги окружности.

1. Постановка задачи

Задача формирования диаграммы направленности (ДН) может рассматриваться как специальный случай задачи фокусировки в линию [1-5]. Фокусировка в линию является известной обратной задачей теории расчета фокусаторов [1-5]. Фокусаторы - это дифракционные оптические элементы (ДОЭ), фокусирующие лазерное излучение в линии и рассчитанные в приближении геометрооптической оптики. В работах по фокусировке в линию специально не исследован практически важный случай формирования ДН. На взгляд авторов эта задача имеет свои интересные особенности, которыми являются общее представление эйконала поля при формировании ДН в виде линии, вид слоев и система координат, специально приспособленная для формирования заданных ДН. Исследованию указанных вопросов и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим расчет ДОЭ для формирования ДН в виде линии. Расчет ДОЭ будем проводить в приближении геометрической оптики. ДН определим в виде единичного вектора направления

$$\mathbf{p}(\sigma)=\left(p_x(\sigma),p_y(\sigma),p_z(\sigma)\right),\ \left|\mathbf{p}(\sigma)\right|=1. \qquad (1)$$

ДН (1) может интерпретироваться как линия на сфере. Радиус сферы предполагается столь большим, что размерами ДОЭ можно пренебречь. При этом направления лучей определяются вектором направления (1). Следуя принятой терминологии, ДОЭ для формирования ДН в виде линии будем также называть фокусаторами.

При расчете фокусаторов предполагается выполненным приближение тонкого оптического элемента [1-5,6]. В этом приближении амплитуда освещающего пучка не изменяется, а изменение эйконала пучка ΔS пропорционально высоте микрорельефа фокусатора h. Таким образом, в плоскости, расположенной непосредственно за фокусатором, функция эйконала имеет вид

$$S(u,v)= S_0(u,v) + \Delta S(u,v), \qquad (2)$$

где $S_0(u,v)$ - эйконал падающего пучка, а $\Delta S(u,v)$ пропорционально высоте микрорельефа $h(u,v)$, где (u,v) – декартовы координаты. Функцию эйконала (2) будем считать заданной в плоскости z=0. Дальнейшее распространение сформированного светового пучка полностью определяется функцией (2). Это сводит расчет микрорельефа ДОЭ к задаче расчета эйконала поля $S(u,v)$ в плоскости z=0 из условия формирования ДН (1).

Уравнение (2) является граничным условием для уравнения эйконала. Решение уравнения эйконала в лучевых координатах (u,v,s) имеет вид:

$$\mathbf{x}(u,v,s)=\mathbf{u}+\nabla S(u,v)\cdot s\,, \qquad (3)$$

$$S(u,v,s)=S(u,v)+s\,. \qquad (4)$$

Координаты (σ, t, s) определяют точку $\mathbf{x}=(x,y,z)$ в области распространения поля через параметры луча (3), содержащего данную точку. При этом точка $\mathbf{u}=(u,v)$ определяет луч, а параметр s - положение точки на луче. Эйконал на лучах определяется уравнением (4). Направления лучей

$$\nabla S(\mathbf{u})=\left(S_x(\mathbf{u}),S_y(\mathbf{u}),S_z(\mathbf{u})\right),\ \left|\nabla S(\mathbf{u})\right|=1$$

в (3) определяются из так называемых соотношений полосы [7]

$$\frac{\partial S(\mathbf{u})}{\partial u}=S_x(\mathbf{u}),\ \frac{\partial S(\mathbf{u})}{\partial u}=S_y(\mathbf{u}). \qquad (5)$$

При расчете фокусаторов уравнения (5) часто называют уравнениями наклонов.

Для формирования заданной ДН (1) функция эйконала (2) должна быть найдена из уравнений

$$\frac{\partial S(\mathbf{u})}{\partial u}=p_x(\sigma(\mathbf{u})),\ \frac{\partial S(\mathbf{u})}{\partial u}=p_y(\sigma(\mathbf{u})), \qquad (6)$$

$\mathbf{u}\in D$, где D – апертура фокусатора. Функция $\sigma(\mathbf{u})$ в (6) определяет соответствие между точками (u,v) апертуры ДОЭ и направлениями лучей. Поскольку апертура - двумерное множество точек, а ДН (1) – одномерное множество, то апертура должна представляться набором линий $L(u,v;\sigma)$, на каждой из которых отраженные лучи имеют одно и то же направление $\mathbf{p}(\sigma)$. В задаче расчета фокусаторов линии $L(u,v;\sigma)$ называют слоями.

Уравнения (6) определяют обратную задачу формирования ДН в виде линии. В терминах уравнения эйконала задача состоит в поиске такого граничного условия (2) для уравнения эйконала, при котором направления дальнейшего распространения лучей описываются функцией (1).

2. Общий вид функции эйконала

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что функция эйконала S(**u**), удовлетворяющая уравнениям (6), определяется следующей системой уравнений

$$\begin{cases} S(u,v)=u\cdot p_x(\sigma)+v\cdot p_y(\sigma)-\Psi(\sigma) \\ u\cdot\dfrac{dp_x(\sigma)}{d\sigma}+v\cdot\dfrac{dp_y(\sigma)}{d\sigma}=\dfrac{d\Psi(\sigma)}{d\sigma} \end{cases}. \qquad (7)$$

Первое уравнение в (7) является эйконалом плоской волны с направлением **p**(σ) при z=0, а второе уравнение – уравнением слоя. Согласно (7), слои являются прямыми, образованными пересечением плоскостей

$$\left(\mathbf{x},\frac{d\mathbf{p}(\sigma)}{d\sigma}\right)=\frac{d\Psi(\sigma)}{d\sigma} \qquad (8)$$

с плоскостью z=0. Функция $\Psi(\sigma)$ в (7) определяет распределение энергии I(σ) вдоль ДН. Как и при расчете фокусаторов, будем называть функцию I(σ) линейной плотностью. Данное название связано с определением линейной плотности как интегральной величины, соответствующей потоку энергии на элемент dσ ДН. Для формирования заданной линейной плотности I(σ), функцию

$$c(\sigma)=\frac{d\Psi(\sigma)}{d\sigma}$$

определим из закона сохранения светового потока. Для этого приравняем световой поток, падающий на часть апертуры D(0,σ), заключенной между начальным и текущим слоями $L(u,v;0)$ и $L(u,v;\sigma)$, к световому потоку, проходящему через часть ДН, заключенной между точками **p**(0) и **p**(σ):

$$\int\limits_0^\sigma I(t)dt=E(\sigma,c(\sigma))=\int\limits_{D(0,\sigma)} I_0(\mathbf{u})d^2\mathbf{u}, \qquad (9)$$

где I_0(**u**) – интенсивность освещающего пучка. В важном случае радиальной симметрии интенсивности освещающего пучка

$$I_0(\mathbf{u})=I_0\left(u^2+v^2\right), |\mathbf{u}|\le R, \qquad (10)$$

где R - радиус апертуры, закон сохранения светового потока может быть представлен в компактной дифференциальной форме:

$$d\left(d(\sigma)\right)\int\limits_{-\sqrt{R^2-d^2(\sigma)}}^{\sqrt{R^2-d^2(\sigma)}} I_0\left(d^2(\sigma)+t^2\right)dt=I(\sigma)d\sigma, \qquad (10)$$

где функция

$$d(\sigma)=\frac{d\Psi(\sigma)}{d\sigma}\Bigg/\sqrt{\left(\frac{dp_x(\sigma)}{d\sigma}\right)^2+\left(\frac{dp_y(\sigma)}{d\sigma}\right)^2} \qquad (11)$$

представляет расстояние от начала координат до слоя.

В общем случае расчет функции c(σ) из закона сохранения светового потока и функции σ(**u**) из уравнения слоя в (7) состоит в решении сложных нелинейных уравнений. При этом расчет функции σ(**u**) требует решения нелинейного уравнения (7) для каждой точки апертуры фокусатора.

Расчет фокусаторов можно упростить за счет введения криволинейных координат **u**=**u**(σ,t), где σ-параметр ДН, а t – некоторый второй параметр. Уравнения наклонов (6) для случая криволинейных координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\sigma,t)}{\partial\sigma}&=p_x(\sigma)\frac{\partial u(\sigma,t)}{\partial\sigma}+p_y(\sigma)\frac{\partial v(\sigma,t)}{\partial\sigma}, \\ \frac{\partial S(\sigma,t)}{\partial t}&=p_x(\sigma)\frac{\partial u(\sigma,t)}{\partial t}+p_y(\sigma)\frac{\partial v(\sigma,t)}{\partial t}. \end{aligned} \qquad (12)$$

Функция эйконала, удовлетворяющая системе (12), определяется уравнениями

$$S(\sigma,t)=p_x(\sigma)u(\sigma,t)+p_y(\sigma)v(\sigma,t)-\Psi(\sigma), \qquad (13)$$

$$\frac{dp_x(\sigma)}{d\sigma}u(\sigma,t)+\frac{dp_y(\sigma)}{d\sigma}v(\sigma,t)=\frac{d\Psi(\sigma)}{d\sigma}. \qquad (14)$$

Для удобства выкладок запишем уравнение слоя (14) в виде

$$\frac{d\tilde{p}_x(\sigma)}{d\xi}u(\sigma,t)+\frac{d\tilde{p}_y(\sigma)}{d\sigma}v(\sigma,t)=d(\sigma), \qquad (15)$$

где функция $d(\sigma)$ - расстояние от начала координат до слоя (11), а

$$\left(\tilde{p}_x(\sigma),\tilde{p}_y(\sigma)\right)=\left(p_x(\sigma),p_y(\sigma)\right)\Bigg/\sqrt{\left(\frac{dp_x(\sigma)}{d\sigma}\right)^2+\left(\frac{dp_y(\sigma)}{d\sigma}\right)^2} \qquad (16)$$

- единичный вектор.

Для формирования диаграмм направленности предлагается использовать следующие криволинейные координаты

$$\begin{cases} u(\sigma,t)=\dfrac{d\tilde{p}_x(\sigma)}{d\sigma}d(\sigma)-t\cdot\dfrac{d\tilde{p}_y(\sigma)}{d\sigma}, \\ v(\xi,t)=\dfrac{d\tilde{p}_y(\sigma)}{d\sigma}d(\sigma)+t\cdot\dfrac{d\tilde{p}_x(\sigma)}{d\sigma}. \end{cases} \qquad (17)$$

Система координат (17) связана со слоями (14), (15) и выражает координаты (u,v) через координату σ, определяющую слой, содержащий данную точку и координату t, определяющую положение точки на слое. Координата t является расстоянием от точки слоя ($u(\sigma,0),v(\sigma,0)$) до текущей точки слоя. При этом точка ($u(\sigma,0),v(\sigma,0)$) является точкой пересечения слоя (15) и нормали к слою, проходящей через начало координат. Легко видеть, что криволинейные координаты (17) удовлетворяют уравнению слоя (14). Поэтому функция эйконала имеет вид

$$S(\sigma,t)=p_x(\sigma)\left(\frac{d\tilde{p}_x(\sigma)}{d\sigma}d(\sigma)-t\cdot\frac{d\tilde{p}_y(\sigma)}{d\sigma}\right)+$$
$$+p_y(\sigma)\left(\frac{d\tilde{p}_y(\sigma)}{d\sigma}d(\sigma)+t\cdot\frac{d\tilde{p}_x(\sigma)}{d\sigma}\right)- \qquad (18)$$
$$-\int_0^\sigma \Psi(x)dx\,.$$

Согласно (18), расчет функции эйконала сводится всего лишь к расчету функции $d(\sigma)$ из закона сохранения светового потока (8), (11) и одномерному интегрированию функции

$$\frac{d\Psi(\sigma)}{d\sigma}=d(\sigma)\sqrt{\left(\frac{dp_x(\sigma)}{d\sigma}\right)^2+\left(\frac{dp_y(\sigma)}{d\sigma}\right)^2}\,.$$

Таким образом, криволинейные координаты (17) позволяют при расчете функции $\sigma(\mathbf{u})$ избежать решения уравнения слоя для каждой точки апертуры.

3. Примеры расчета функции эйконала

Рассмотрим расчет эйконала из условия формирования ДН в виде отрезка

$$\mathbf{X}(\sigma)=(\cos(\sigma),0,\sin(\sigma)),\sigma\in[\sigma_0,\sigma_1], \qquad (19)$$

где σ - полярный угол в плоскости XOZ. Для отрезка (19) слои являются прямыми $u=d(\sigma)$. Предположим, что апертура фокусатора ограничена линиями $v=g_1(u)$ и $v=g_2(u)$ и отрезками прямых $u=a$ и $u=b$. Полагая в (8) $u=d(\sigma)$, получим для расчета функции лучевого соответствия $\sigma=\sigma(\mathrm{u})$ следующее уравнение:

$$\int_a^u\int_{g_1(u)}^{g_2(u)} I_0(u,v)dudv=\int_0^\sigma I(\chi)d\chi\,. \qquad (20)$$

Запишем закон сохранения светового потока (20) в дифференциальной форме:

$$\frac{d\sigma(u)}{du}=\frac{1}{I(\sigma(u))}\int_{g_1(u)}^{g_2(u)} I_0(u,v)dv,$$
$$\sigma(a)=\sigma_0,\sigma(b)=\sigma_1. \qquad (21)$$

Подставляя (19) в (6), получим:

$$\frac{\partial S(u)}{\partial u}=\cos(\sigma(u)),$$
$$S(u)=\int_0^u\cos(\sigma(\xi))d\xi\,. \qquad (22)$$

При формировании ДН в виде отрезка (19) мы не использовали общее представление эйконала в виде (7), (18). Для случая формирования более сложной ДН расчет эйконала является неординарной задачей и требует использования криволинейных координат. Рассмотрим расчет эйконала поля из условия формирования ДН в виде дуги окружности с постоянной линейной плотностью. Апертуру D будем считать круглой с радиусом R. Уравнение ДН имеет вид:

$$p(\sigma)=(p_x(\sigma),p_y(\sigma),p_z(\sigma))=$$
$$=(\sin(\theta)\cos(\sigma-\sigma_1/2), \qquad (23)$$
$$\sin(\theta)\sin(\sigma-\sigma_1/2),\ \cos(\theta)),$$

где (σ,θ) – сферические координаты, σ- полярный угол в плоскости XOY, $\sigma\in[0,\sigma_1]$, σ_1 - угловой размер дуги.

Из закона сохранения светового потока (10) несложно получить функцию $\sigma(d)$ в виде:

$$\sigma(d)=\frac{\sigma_1}{\pi}\left(\arcsin\left(\frac{d}{R}\right)+\frac{d}{R}\sqrt{1-\left(\frac{d}{R}\right)^2}\right) \qquad (24)$$

Подставляя (23) в (18), получим запись эйконала поля, обеспечивающего формирование ДН в форме дуги окружности (23), в виде:

$$S(\sigma,t)=-\sin(\theta)\cdot\left(t+\int_0^\sigma d(x)dx\right), \qquad (25)$$

где функция $d(\sigma)$ определяется из (24). Простой вид полученной функции эйконала (25) подчеркивает достоинство криволинейных координат. Отметим, что при расчете функции эйконала в декартовых координатах потребуется, помимо расчета функции $d(\sigma)$ из (24) и ее интегрирования, решать уравнения слоя

$$-\sin(\sigma-\sigma_1/2)u+\cos(\sigma-\sigma_1/2)v=d(\sigma)$$

относительно σ для каждой точки апертуры **u**.

4. Заключение

Предложены криволинейные координаты (17), облегчающие расчет ДОЭ для формирования ДН в виде линии. В криволинейных координатах получено новое представление функции эйконала (18) в непараксиальном приближении, которое не требует расчета функции лучевого соответствия.

Литература

1. Данилов В.А., Кинбер Б.Е., Шишлов А.И., Теория когерентных фокусаторов // Компьютерная оптика, 1987, в. 1, с. 40-52.
2. Гончарский А.В., Попов В.В., Степанов В.В. *Введение в Компьютерную Оптику* // Изд-во Московского Гос. Университета, 1991, 310с.
3. Soifer V., Kotlyar V., Doskolovich L. *Iterative Methods for Diffractive Optical Elements Computations* // London, Taylor&Francis LTD, 1997, 244p.
4. *Methods For Computer Design of Diffractive Optical Elements. Edited by Victor A. Soifer*. // A Wiley-Interscience Publication John Wiley & Sons, Inc., 2002, 765p.
5. *Методы Компьютерной Оптики* Под редакцией В.А. Сойфера // М.: «Физматлит», 2000, 688 с.
6. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики.* //М.: Наука, 1973, 720 с.
7. Р.Курант. *Уравнения с частными производными.* // М.: Мир, 1964, 830с.