

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АБЕЛЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ГРАДИЕНТНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ СО СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

В.В. Котляр, А.С. Мелехин

Институт систем обработки изображений РАН
Самарский государственный аэрокосмический университет

Аннотация

С помощью интегрального преобразования Абеля в рамках геометрической оптики получены и решены интегральные уравнения для известных линз со сферически-симметричным распределением показателя преломления: линзы Максвелла «рыбий глаз» и линзы Итона-Липмана. Кроме того, в данной работе приведено решение задачи синтеза градиентного оптического элемента со сферически-симметричным распределением показателя преломления, фокусирующего плоский пучок света в радиально-симметричную область с заданным распределением интенсивности, находящуюся на некотором расстоянии от элемента в плоскости, перпендикулярной оптической оси падающего пучка.

Введение

В предыдущей работе авторов [1] в рамках геометрической оптики с помощью пары (прямого и обратного) интегральных преобразований Абеля получены и решены интегральные уравнения для расчета показателя преломления известных градиентных оптических элементов со сферической симметрией (обобщенной линзы Лунеберга [2], для которой интегральные уравнения были ранее получены Морганом [3] и Флетчером [4]; обычной линзы Лунеберга) и цилиндрической симметрией (линзы Микаэляна [5] и аксикона [6]).

В данной работе аналогичным образом с помощью преобразования Абеля получены и решены интегральные уравнения для других известных сферически-симметричных градиентных оптических элементов (линзы Максвелла «рыбий глаз» [7] и линзы-зеркала Итона-Липмана [8]). Кроме того, в работе получено и решено интегральное уравнение для сферически-симметричного градиентного оптического элемента, фокусирующего плоский пучок лучей в радиальную область с заданным распределением интенсивности (распределением плотности лучей), расположенную в плоскости за элементом, перпендикулярной оси падающего пучка. Аналогичная задача, но для расчета градиентного сферически-симметричного оптического элемента, фокусирующего излучение, исходящее из точечного источника лучей в радиальную область, была рассмотрена Флоресом [9].

1. Решение интегрального уравнения Абеля для линзы Максвелла «рыбий глаз»

В [10] в качестве примера «абсолютного прибора», который все лучи, исходящие из произвольной точки сферически-симметричной градиентной среды, собирает также в некоторую точку, лежащую на прямой, соединяющей точки источника и центра симметрии среды, рассмотрен «рыбий глаз» Максвелла.

Получим интегральное уравнение Абеля для такой среды и найдем его решение с помощью формулы обращения. На рис.1 показан ход произвольного луча из семейства лучей, которые исходят из точки на расстоянии a от центра среды с показате-

лем преломления $n=n(r)$ и сходятся в точке, лежащей на линии, соединяющей точки источника и центра сферы и отстоящей от центра на расстояние b .

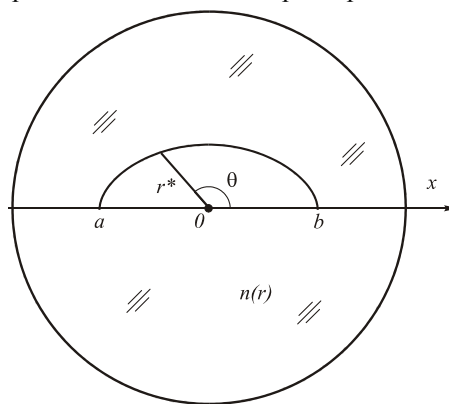


Рис. 1. Ход лучей в среде «рыбий глаз»

Общее уравнение для участка луча в сферически-симметричной среде известно [11]:

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{h} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r \sqrt{n^2(r)r^2 - h^2}}, \quad (1)$$

где: $h = n(r^*)r^*$ – постоянная луча, r^* – радиус, при котором траектория имеет касательную, перпендикулярную этому радиусу, $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$ – начальные и конечные радиусы и углы, которые образуют радиусы с осью x , для участка траектории луча.

Для линзы «рыбий глаз» из геометрических соображений (см. рис. 1) уравнение (1) будет иметь вид:

$$\int_a^{r^*} \frac{dr}{r \sqrt{n^2 r^2 - h^2}} + \int_{r^*}^b \frac{dr}{r \sqrt{n^2 r^2 - h^2}} = \frac{\pi}{h}. \quad (2)$$

Уравнение (2) получено при условии, что все лучи начинаются на оси x в точке a и все они сходятся, также на оси x , в точке b , поэтому угол $\theta_1 - \theta_2 = \pi$.

Решим уравнение (2) с помощью пары преобразований Абеля, которые запишем в виде [1]:

$$F(r) = 2 \int_r^{r_0} \frac{f(x) x dx}{\sqrt{x^2 - r^2}}, \quad (3)$$

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \left[\int_x^{r_0} \frac{dF(r) dr}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{F(r_0)}{\sqrt{r_0^2 - x^2}} \right]. \quad (4)$$

Разобьем уравнение (2) на два уравнения с помощью неизвестной функции $f(h)$:

$$\int_x^a \frac{dr}{r\sqrt{n^2 r^2 - h^2}} = f(h), \quad (5)$$

$$\int_x^b \frac{dr}{r\sqrt{n^2 r^2 - h^2}} = \frac{\pi}{h} - f(h). \quad (6)$$

С помощью замены переменных: $n(r)r = \rho$, $r = m(\rho)$, $F(\rho) = \ln r = \ln m(\rho)$, $n(a)a = h_a$, $n(b)b = h_b$, преобразуем уравнение (5) к уравнению (4):

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \left[\int_h^{h_a} \frac{dF(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - h^2}} - \frac{F(h_a)}{\sqrt{h_a^2 - h^2}} \right] = \\ & = -\frac{1}{\pi} \left[f(h) - \frac{F(h_a)}{\sqrt{h_a^2 - h^2}} \right] = \tilde{f}(h). \end{aligned} \quad (7)$$

Левая часть уравнения (7) по виду совпадает с правой частью уравнения (4), поэтому для нахождения функции $F(\rho)$ можно воспользоваться уравнением обращения (3). Получим:

$$\begin{aligned} F(\rho) &= 2 \int_\rho^{h_a} \frac{\tilde{f}(h) h dh}{\sqrt{h^2 - \rho^2}} = -\frac{2}{\pi} \int_\rho^{h_a} \frac{f(h) h dh}{\sqrt{h^2 - \rho^2}} + \\ &+ \frac{2F(h_a)}{\pi} \int_\rho^{h_a} \frac{h dh}{\sqrt{(h_a^2 - h^2)(h^2 - \rho^2)}} = \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_\rho^{h_a} \frac{f(h) h dh}{\sqrt{h^2 - \rho^2}} + F(h_a). \end{aligned} \quad (8)$$

Последнее равенство в уравнении (8) получено с помощью табличного интеграла [12]:

$$\int_x^y \frac{dt}{\sqrt{(t-x)(y-t)}} = \pi. \quad (9)$$

Далее подставим в интеграл уравнения (8) функцию $f(h)$ из уравнения (6), получим ($b \geq a$):

$$\begin{aligned} F(\rho) - F(h_a) &= -\frac{2}{\pi} \int_\rho^{h_a} \frac{h dh}{\sqrt{h^2 - \rho^2}} \left[\frac{\pi}{h} - \int_\rho^{h_b} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - h^2}} \right] = \\ &= -2 \int_\rho^{h_a} \frac{dh}{\sqrt{h^2 - \rho^2}} + \frac{1}{\pi} \int_\rho^{h_b} \frac{d\rho' d\rho'}{\rho' \sqrt{(h^2 - \rho'^2)(\rho'^2 - h^2)}} = \\ &= -2 \ln \left(\frac{h_a + \sqrt{h_a^2 - \rho^2}}{\rho} \right) + F(h_b) - F(\rho). \end{aligned} \quad (10)$$

В уравнении (10) последнее равенство получено с помощью интеграла (9) и другого табличного интеграла [12]:

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right|. \quad (11)$$

Из уравнения (10) в исходных обозначениях получим:

$$2 \ln r - \ln a - \ln b = -2 \ln \left(\frac{h_a + \sqrt{h_a^2 - \rho^2}}{\rho} \right), \quad (12)$$

или:

$$\frac{r}{\sqrt{ab}} = \frac{n(r)r}{n(a)a + \sqrt{n^2(a)a^2 - n^2(r)r^2}}. \quad (13)$$

Из уравнения (13) нетрудно получить явный вид зависимости показателя преломления линзы «рыбий глаз»:

$$n(r) = \frac{2\sqrt{\frac{a}{b}}n(a)}{1 + \left(\frac{r}{\sqrt{ab}}\right)^2}, \quad (14)$$

или:

$$n(r) = \frac{n(0)}{1 + \left(\frac{r}{S}\right)^2}, \quad (15)$$

где $n(0) = 2\sqrt{(a/b)} \cdot n(a)$ – показатель преломления в центре симметрии среды при $r = 0$, $S = \sqrt{ab}$ – радиус, на котором показатель преломления уменьшается в два раза по сравнению со значением в центре $n(0)$.

Заметим, что если разбить уравнение (2) вместо уравнений (5) и (6) на два других уравнения:

$$\int_x^b \frac{dr}{r\sqrt{n^2 r^2 - h^2}} = f(h), \quad (16)$$

$$\int_x^a \frac{dr}{r\sqrt{n^2 r^2 - h^2}} = \frac{\pi}{h} - f(h), \quad (17)$$

то вместо уравнения (14) получили бы уравнение вида:

$$n(r) = \frac{2\sqrt{\frac{b}{a}}n(b)}{1 + \left(\frac{r}{\sqrt{ab}}\right)^2}, \quad (18)$$

или:

$$n(r) = \frac{n(0)}{1 + \left(\frac{r}{S}\right)^2}. \quad (19)$$

Из уравнений (14) и (18) следует, что:

$$bn(b) = an(a). \quad (20)$$

По закону Бугера [10] для любого луча в сферически-симметричной градиентной среде можно записать, что:

$$\begin{aligned} h &= n(r)r \sin \psi_r = n(a)a \sin \psi_a = \\ &= n(b)b \sin \psi_b = n(r^*)r^* = const . \end{aligned} \quad (21)$$

Этот закон является обобщением закона преломления Снелиуса, углы ψ_r, ψ_a, ψ_b равны углам, образованным радиус-вектором и касательной в точках r, a и b соответственно.

Сравнивая (20) и (21), можно сделать вывод, что $\psi_a = \psi_b$. Это означает, что все лучи, исходящие из точки a и входящие в точку b являются дугами окружностей, центры которых лежат на прямой, перпендикулярной отрезку $[a, b]$ и проходящей через середину этого отрезка.

2. Расчет градиентной линзы Итона-Липмана

В [8] приведен показатель преломления градиентной линзы Итона-Липмана, которая как сферически-симметричное зеркало любой луч, падающий на эту линзу, отражает назад. Показатель преломления такой линзы-зеркала имеет вид:

$$n(r) = n(R) \sqrt{\frac{2R}{r} - 1} . \quad (22)$$

Приведем расчет линзы Итона-Липмана с помощью преобразования Абеля. Для простоты рассуждений и чтобы не учитывать отражение от границы линзы, примем $R = l$ и $n(l) = 1$.

На рис. 2 показан ход произвольного луча в сферически-симметричной линзе-зеркале:

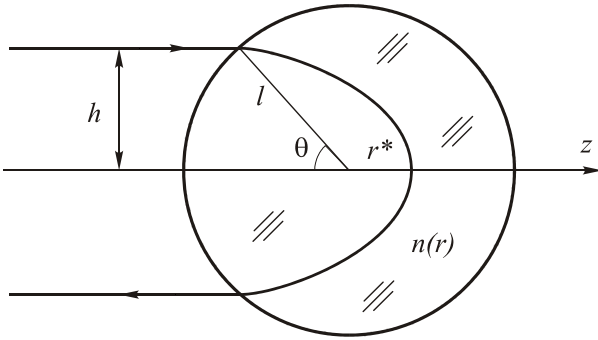


Рис. 2. Ход луча в линзе-зеркале

Из рис. 2 видно, что любой луч, например параллельный оси z , чтобы развернуться назад и при выходе из линзы иметь направление параллельное оси z , должен проходить в точке лежащей на оси z с наименьшим расстоянием r^* от центра линзы. Тогда общее интегральное уравнение для луча (1) можно записать в конкретном виде для линзы Итона-Липмана:

$$\int_{r^*}^1 \frac{dr}{r \sqrt{n^2 r^2 - h^2}} = \frac{\pi - \arcsin h}{h} , \quad (23)$$

где $h = n(r^*)r^*$, r^* – кратчайшее расстояние от луча до центра линзы, h – расстояние от луча до оси z , $\sin \theta = h$, $\theta_2 - \theta_1 = \pi - \theta = \pi - \arcsin h$, $h = n(r)r \sin \psi$ –

инвариант луча, ψ – угол между направлением луча и радиусом до центра линзы.

Уравнение (23) можно решить с помощью пары преобразований Абеля (3) и (4). Для этого введем обозначение:

$$F(\rho) = \ln r , \quad n(r)r = \rho , \quad (24)$$

тогда вместо уравнения (23) запишем:

$$-\frac{1}{\pi} \int_h^1 \frac{dF(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - h^2}} = f(h) , \quad (25)$$

где:

$$f(h) = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi - \arcsin h}{h} \right] . \quad (26)$$

Обращая уравнение (25) с помощью преобразования Абеля (3), получим:

$$\begin{aligned} F(\rho) &= 2 \int_{\rho}^1 \frac{f(h) h dh}{\sqrt{h^2 - \rho^2}} = \\ &= -2 \int_{\rho}^1 \frac{dh}{\sqrt{h^2 - \rho^2}} + \frac{2}{\pi} \int_{\rho}^1 \frac{\arcsin h dh}{\sqrt{h^2 - \rho^2}} . \end{aligned} \quad (27)$$

Первый интеграл в уравнение (27) табличный [12]:

$$\int_{\rho}^1 \frac{dh}{\sqrt{h^2 - \rho^2}} = \ln \left| h + \sqrt{h^2 - \rho^2} \right| \Big|_{\rho}^1 = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}{\rho} \right) . \quad (28)$$

Второй интеграл вычислен ранее через производную преобразования Абеля [1] и равен:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\rho}^1 \frac{\arcsin h dh}{\sqrt{h^2 - \rho^2}} = \ln \sqrt{1 + \sqrt{1 - \rho^2}} . \quad (29)$$

Тогда уравнение (27) примет вид:

$$F(\rho) = \ln r = \ln \left(\frac{\rho^2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}} \right) . \quad (30)$$

С учетом того, что $\rho = n(r)r$, из уравнения (30) получим промежуточное уравнение:

$$r = \frac{n^2(r)r^2}{1 + \sqrt{1 - n^2(r)r^2}} , \quad (31)$$

решение которого имеет вид:

$$n(r) = \sqrt{\frac{2-r}{r}} . \quad (32)$$

Решение (32) совпадает с уравнением (22) при $n(R) = 1$ и $R = l$. Заметим, что при $r \rightarrow 0$, $n(0) \rightarrow \infty$. Особенность в нуле решения (30) делает реализацию линзы-зеркала невозможной. Однако наличие точного решения может облегчить поиск приближенного и реализуемого на практике распределения сферически-симметричного показателя преломления для линзы-зеркала, отражающей назад падающий с любой стороны луч.

3. Интегральные уравнения Абеля для сферически-симметричных градиентных оптических элементов

В работах [9, 6] рассмотрен расчет сферических градиентных оптических элементов, предназначенных для фокусировки излучения, исходящего из точечного источника, в произвольное радиально-симметричное распределение интенсивности в некоторой плоскости за оптическим элементом.

Приведем здесь вывод интегрального уравнения Абеля для такой задачи, но для плоского пучка лучей, падающих на сферически-симметричный градиентный элемент.

На рис. 3 показана оптическая схема.

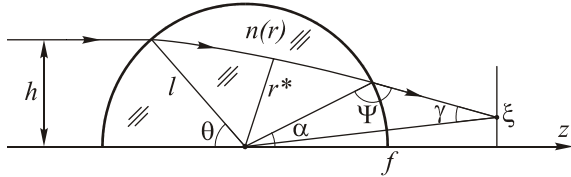


Рис.3. Оптическая схема для расчета сферически-симметричного градиентного элемента, фокусирующего плоский пучок лучей в произвольную радиально-симметричную область с заданным распределением интенсивности в плоскости, отстоящей от центра элемента на расстояние f .

Из рис. 3 можно установить следующие геометрические соотношения (радиус сферы l , $n(l) = 1$):

$$\sin \gamma = \frac{\sin \psi}{\sqrt{l^2 + \xi^2}}, \quad (33)$$

$$\alpha = \pi - \psi - \gamma + \arctg \frac{\xi}{f}, \quad (34)$$

$$\psi = \pi - \theta = \pi - \arcsin h, \quad (35)$$

где $\xi = \xi(h)$ – точка, в которую приходит луч, отстоящий от оси z на расстояние h и параллельный этой оси до градиентного оптического элемента, r^* – минимальное расстояние луча от центра, $h = n(r^*)r^*$ – параметр луча, который в произвольной точке вдоль по ходу луча внутри оптического элемента имеет вид закона Снелиуса:

$$h = n(r)r \sin \psi, \quad (36)$$

где ψ угол между лучом и радиусом.

Из рис. 3 видно, что часть луча внутри оптического элемента симметрична относительно радиуса r^* , при котором угол ψ равен $\pi/2$, поэтому в уравнении (1), которое верно для любого луча в градиентной среде со сферически-симметричным показателем преломления, достаточно выбрать половину части луча от $r_2 = r^*$ до $r_1 = l$, при этом:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi - \theta - \alpha}{2}. \quad (37)$$

Тогда уравнение (1) с учетом выражений (37) и (33) – (35) примет вид:

$$\int_{r^*}^l \frac{dr}{r\sqrt{n^2(r)r - h^2}} = \frac{\pi - 2 \arcsin h + \arcsin \frac{h}{\sqrt{f^2 + \xi^2}} - \arctg \frac{\xi}{f}}{2h}, \quad (38)$$

где $h = n(r^*)r^*$.

Заметим, что в пределе $\xi \rightarrow 0$ вместо уравнения (38) получится известное уравнение Моргана [3] для обобщенной линзы Лунеберга:

$$\int_{r^*}^l \frac{dr}{r\sqrt{n^2(r)r - h^2}} = \frac{2 \arccos h + \arcsin \frac{h}{f}}{2h}. \quad (39)$$

Уравнение Моргана (39) легко свести к уравнению Флетчера [4], которое более удобно решать с помощью преобразования Абеля [1]:

$$\int_{r^*}^l \frac{dr}{r\sqrt{n^2(r)r - h^2}} - \frac{\arccos h}{h} = \int_1^{n^*} \frac{dn}{n\sqrt{n^2 r^2 - h^2}} = \frac{\arcsin \frac{h}{f}}{2h}. \quad (40)$$

Для сферически-симметричного градиентного оптического элемента (37) уравнение типа Флетчера (40) будет иметь вид:

$$\int_1^{n^*} \frac{dn}{n\sqrt{n^2 r^2 - h^2}} = \frac{\arcsin \frac{h}{\sqrt{f^2 + \xi^2}(h)} - \arctg \frac{\xi(h)}{f}}{2h}, \quad (41)$$

где $n^* = n(r^*)$, $h < 1$.

Решать уравнение (41) можно с помощью пары преобразований Абеля (3) и (4).

Для сведения уравнения (41) к уравнению (4) введем обозначения: $n(r)r = \rho$, $F(\rho) = \ln n(r) = \ln m(\rho)$. Учтем, что $F(1) = \ln n(l) = \ln 1 = 0$. Тогда уравнение (38) переписывается в виде:

$$-\frac{1}{\pi} \int_x^1 \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - h^2}} = \frac{1}{\pi} S(h), \quad (42)$$

где:

$$S(h) = \frac{\arcsin \frac{h}{\sqrt{f^2 + \xi^2}(h)} - \arctg \frac{\xi(h)}{f}}{2h}. \quad (43)$$

Уравнение (42) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (4). Тогда функцию $F(\rho)$ можно найти с помощью уравнения Абеля (3):

$$F(\rho) = \frac{2}{\pi} \int_{\rho}^1 \frac{S(h)h dh}{\sqrt{h^2 - \rho^2}}. \quad (44)$$

Тогда, в прежних обозначениях, вместо уравнения (44) получим:

$$n(\rho) = \exp \varphi_1(\rho) \exp \varphi_2(\rho), \quad (45)$$

где:

$$\varphi_1(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{\rho}^1 \frac{\arcsin \left[\frac{h}{\sqrt{f^2 + \xi^2(h)}} \right] dh}{\sqrt{h^2 - \rho^2}}, \quad (46)$$

$$\varphi_2(\rho) = -\frac{1}{\pi} \int_{\rho}^1 \frac{\arctg \left[\frac{\xi(h)}{f} \right] dh}{\sqrt{h^2 - \rho^2}}, \quad (47)$$

$$\rho = n(r)r.$$

Аналитически интегралы в выражениях (46) и (47) не берутся, но они могут быть вычислены численно. Функцию $\xi(h)$ можно получить из условия сохранения энергии:

$$\int_0^h I_0(h') h' dh' = C^2 \int_0^{\xi} I_1(\xi') \xi' d\xi', \quad (48)$$

где $I_0(h)$ и $I_1(\xi)$ - распределения интенсивности в падающем плоском пучке и в плоскости фокусировки, соответственно. Например, для случая фокусировки плоского пучка с постоянной интенсивностью I_0 в фокальную круглую область также с постоянной интенсивностью I_1 , из уравнения (48), следует связь между ξ и h :

$$\xi = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{I_0}{I_1}} h. \quad (49)$$

Константа C определяется из граничных условий: крайний луч при $h = l$ должен попадать в крайнюю точку фокального круга при $\xi = \xi_0$, тогда

$$C^{-1} = \xi_0 \sqrt{\frac{I_1}{I_0}}.$$

Для фокусировки плоского пучка с гауссовой интенсивностью $I_0(h) = I_0 \exp\left(-\frac{h^2}{\omega^2}\right)$ в фокальный круг с постоянной интенсивностью $I_1(\xi) = I_1$ из уравнения (48) нетрудно получить связь между параметрами h и ξ :

$$\xi = \frac{\omega}{C} \left[\frac{I_0}{I_1} \left(1 - \exp\left(-\frac{h^2}{\omega^2}\right) \right) \right]^{1/2}. \quad (50)$$

Заключение

В работе получены следующие результаты:

- С помощью интегрального преобразования Абеля в рамках геометрической оптики получены и решены интегральные уравнения для известных линз со сферически-симметричным распределением показателя преломления: линзы Максвелла «рыбий глаз» и линзы Итона-Липмана.

- Получено решение задачи расчета градиентного оптического элемента со сферически-симметричным распределением показателя преломления, который фокусирует плоский пучок света в радиально-симметричную область с заданным распределением интенсивности, находящуюся на некотором расстоянии от элемента в плоскости, перпендикулярной оптической оси падающего пучка.

Литература

1. Котляр В.В., Мелёхин А.С. Преобразование Абеля в задачах синтеза градиентных оптических элементов // Компьютерная оптика, вып. 22, с. 29-36, 2001.
2. Luneburg R.K. Mathematical Theory of Optics. Brown U. Press, Providence, R.I., 1944.
3. Morgan S.P. General solution of the Luneburg lens problem. // J. Appl. Phys., v. 29, p. 1358-1368, 1958.
4. Fletcher A., Murphy T., Young A. Solution of two optical problems. // Proc. R. Soc. London, Ser. A, v. 223, p. 216-225, 1954.
5. Микаэлян А.Л. Применение слоистой среды для фокусирования волн // Доклады академии наук СССР, т. LXXXI, с. 569-571, 1951.
6. Flores J.R. General method of design spherically symmetric grin-axicons. // J. of Modern Optics, v. 48, no. 11, 2001.
7. Maxwell J.C. Scientific Papers. v. 1, Cambr. Univ. Press, 1890.
8. Физическая энциклопедия. Т. 2, М., Наука.
9. Flores J.R. Spherically symmetric GRIN amplitude formers. // J. of Modern Optics, v. 48, no. 7, p. 1225-1238, 2001.
10. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., Наука, 1973.
11. Greishuk G.I., Bobrov S.T., Stepanov S.A. Optics of diffractive and gradient-index elements and systems. SPIE Press, Bellingham, 1997.
12. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. М., Наука, 1981.