РАСЧЕТ ОБОБЩЕННЫХ ЛИНЗ «РЫБИЙ ГЛАЗ» МАКСВЕЛЛА И ИТОНА-ЛИПМАНА

В.В. Котляр, А.С. Мелехин
Институт систем обработки изображений РАН
Самарский государственный аэрокосмический университет

Аннотация

Получены и решены с помощью преобразования Абеля интегральные уравнения для лучей в двух градиентных линзах со сферически-симметричной зависимостью показателя преломления от координат. Первая линза в виде полу-шара со сферически-симметричным распределением показателя преломления фокусирует плоский пучок лучей, падающий перпендикулярно на плоскую поверхность полу-шара, в точку, лежащую на оси падающего пучка и на некотором расстоянии от полу-шара. Такая линза, как оказалось, является обобщением известной линзы «рыбий глаз» Максвелла. Вторая линза является обобщением известной линзы Итона-Липмана и отражает (или преломляет) любой луч под заданным углом. Из падающего параллельного пучка лучей обобщенная линза Итона-Липмана формирует конические волны, то есть является градиентным аксиконом. Кроме того, получено и решено интегральное уравнение для расчета градиентного сферически-симметричного фокусатора в виде полу-шара, который фокусирует падающий перпендикулярно его плоской поверхности параллельный пучок лучей в радиально симметричную область плоскости с заданным распределением интенсивности, расположенной перпендикулярно оси пучка на некотором расстоянии от полу-шара.

Введение

В предыдущей работе авторов [1] в рамках геометрической оптики с помощью пары (прямого и обратного) интегральных преобразований Абеля получены и решены интегральные уравнения для расчета показателя преломления известных градиентных оптических элементов со сферической симметрией (обобщенной линзы Лунеберга [2], для которой интегральные уравнения были ранее получены Морганом [3] и Флетчером [4]; обычной линзы Лунеберга) и цилиндрической симметрией (линзы Микаэляна [5]).

В данной работе аналогичным образом с помощью преобразования Абеля получены и решены интегральные уравнения для других сферически-симметричных градиентных оптических элементов: обобщенной линзы Максвелла «рыбий глаз», выполненной в виде полу-шара[6], и обобщенной линзы-зеркала Итона-Липмана [7]. В первом случае обобщение состоит в том, что градиентный оптический элемент со сферической зависимостью показателя преломления выполнен в виде полу-шара и предназначен для фокусировки падающего перпендикулярно его плоской поверхности параллельного пучка лучей в точку на оптической оси, лежащую за пределами элемента. Во втором случае обобщение состоит в том, что линза Итона-Липмана отражает (или преломляет) любой луч не на 360 градусов, а на некоторый заданный угол. При этом получается, что параллельный пучок лучей преобразуется обобщенной линзой Итона-Липмана в набор расходящихся (или сходящихся) конических волн.

Кроме того, в работе получено и решено интегральное уравнение для расчета градиентного сферически-симметричного оптического элемента в виде полу-шара, фокусирующего падающий перпендикулярно его плоской поверхности параллельный пучок лучей в радиально-симметричную область плоскости с заданным распределением интенсивности, перпендикулярную оси пучка и отстоящую на некотором расстоянии от полу-шара. Данный оптический элемент отличается от градиентного оптического элемента со сферической симметрией в виде шара, формирующего такое же распределение интенсивности и рассчитанного ранее Флоресом [8,9].

1. Обобщенная линза Максвелла «рыбий глаз»

На рис. 1 показан ход произвольного луча в обобщенной линзе Максвелла, которая представляет собой полу-шар из материала со сферически-симметричным распределением показателя преломления *n(r)*, причем пусть радиус шара равен единице *r=1* и *n(1)=1*. Пусть на такой градиентный оптический элемент перпендикулярно его плоской поверхности падает пучок параллельный лучей, которые, пройдя внутри полу-шара, собираются в одну точку, расположенную на оси на расстоянии *f* за элементом.

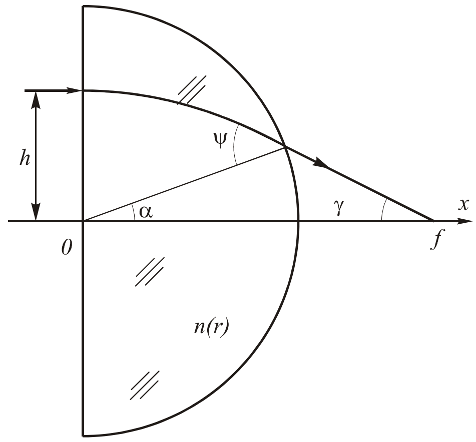

Рис. 1. Ход лучей в обобщенной линзе Максвелла «рыбий глаз» в виде полу-шара

Общее уравнение для участка луча в сферически-симметричной среде известно [10,11]:

$$\frac{\theta_2-\theta_1}{h}=\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r\sqrt{n^2(r)r^2-h^2}}\ , \qquad (1)$$

где: $h=n\left(r^*\right)\ r^*$ – постоянная луча, r^* – радиус, при котором траектория имеет касательную, перпендикулярную этому радиусу, r_1, r_2, θ_1, θ_2 – начальные и конечные радиусы и углы, которые образуют радиус с осью x, для участка траектории луча.

Для обобщенной линзы «рыбий глаз» из геометрических соображений (см. рис.1) можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned}&\alpha=\psi-\gamma\ ,\ \theta=\frac{\pi}{2}-\alpha,\\ &n(r)r\sin\psi(r)=h,\ \sin\psi(1)=h,\ \sin\gamma=\frac{h}{f}.\end{aligned} \qquad (2)$$

Тогда уравнение (1) для обобщенной линзы Максвелла будет иметь вид:

$$\int_{r^*}^{1}\frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{n^2r^2-h^2}}=\frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin h+\arcsin(\frac{h}{f})}{h}\ . \qquad (3)$$

Решим уравнение (3) с помощью пары преобразований Абеля, которые запишем в виде [1]:

$$F(r)=2\int_{r}^{r_0}\frac{f(x)x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-r^2}}\ , \qquad (4)$$

$$f(x)=-\frac{1}{\pi}\left[\int_{x}^{r_0}\frac{\frac{\mathrm{d}F(r)}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-x^2}}-\frac{F(r_0)}{\sqrt{r_0^2-x^2}}\right]. \qquad (5)$$

С помощью замены переменных: $n(r)r=\rho$, $r=m(\rho)$, $F(\rho)=\ln r=\ln m(\rho)$, преобразуем уравнение (3) к уравнению (5):

$$-\frac{1}{\pi}\left[\int_{h}^{h_a}\frac{\frac{\mathrm{d}F(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{d}\rho}{\sqrt{\rho^2-h^2}}\right]=-\frac{1}{\pi}\left[f(h)\right], \qquad (6)$$

где функция *f(h)* равна правой части в уравнении (3).

Левая часть уравнения (6) по виду совпадает с правой частью уравнения (5), поэтому для нахождения функции $F(\rho)$ можно воспользоваться уравнением обращения (4). Получим:

$$\begin{aligned}F(\rho)&=-\frac{2}{\pi}\int_{\rho}^{1}\frac{f(h)h\mathrm{d}h}{\sqrt{h^2-\rho^2}}=\\ &=-\frac{2}{\pi}\int_{\rho}^{1}\frac{h\mathrm{d}h}{\sqrt{h^2-\rho^2}}\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin(h)+\arcsin(\frac{h}{f})}{h}\right)\ .\end{aligned} \qquad (7)$$

В правой части уравнения (7) три слагаемых, из них первое слагаемое приводит к следующему табличному интегралу [12]:

$$\int_{\rho}^{1}\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h^2-\rho^2}}=\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right), \qquad (8)$$

а второе слагаемое приводит к интегралу, полученному в [1]:

$$\frac{2}{\pi}\int_{\rho}^{1}\frac{\arcsin h\,\mathrm{d}h}{\sqrt{h^2-\rho^2}}=\ln\left(1+\sqrt{1-\rho^2}\right). \qquad (9)$$

Тогда вместо уравнения (7) можно записать следующее уравнение:

$$\begin{aligned}F(\rho)=\ln r=-\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right)+\\ +\ln\left(1+\sqrt{1-\rho^2}\right)-\frac{2}{\pi}\int_{\rho}^{1}\frac{\arcsin(\frac{h}{f})\mathrm{d}h}{\sqrt{h^2-\rho^2}}\end{aligned}\ . \qquad (10)$$

Из уравнения (10) можно получить окончательное трансцендентное уравнение для расчета радиальной зависимости показателя преломления в обобщенной линзе Максвелла в виде полу-шара:

$$n(r)=\exp\left[\frac{2}{\pi}\int_{\rho}^{1}\frac{\arcsin\left(\frac{h}{f}\right)dh}{\sqrt{h^2-\rho^2}}\right],\ \rho=n(r)r\ . \qquad (11)$$

Уравнение (11) отличается множителем 2 в показателе экспоненты от известного уравнения для обобщенной линзы Лунеберга [3, 4, 8, 9]:

$$n(r)=\exp\left[\frac{1}{\pi}\int_{\rho}^{1}\frac{\arcsin\left(\frac{h}{f}\right)dh}{\sqrt{h^2-\rho^2}}\right],\ \rho=n(r)r\ . \qquad (12)$$

Кроме того, из уравнения (11) можно получить при *f=1*, то есть при фокусировке в точку на поверхности элемента, решение для обычной линзы Максвелла «рыбий глаз». Действительно, при *f=1* вместо уравнения (3) получим:

$$\int_{r^*}^{1}\frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{n^2r^2-h^2}}=\frac{\pi}{2h}\ . \qquad (13)$$

Из уравнения (13), действуя с помощью пары преобразований Абеля, вместо уравнения (10) получим следующее уравнение:

$$F(\rho)=\ln r=-\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right), \qquad (14)$$

из которого нетрудно получить явную радиальную зависимость показателя преломления:

$$n(r)=\frac{2}{1+r^2}\ . \qquad (15)$$

Зависимость (15) является частным случаем зависимости показателя преломления для обычной линзы «рыбий глаз» [10]:

$$n(r)=\frac{n(0)}{1+\left(\frac{r}{s}\right)^2}, \tag{16}$$

где $n(0)$ – показатель преломления в центре симметрии среды при $r = 0$, s – радиус, на котором показатель преломления уменьшается в два раза по сравнению со значением в центре $n(0)$. При фокусировке из точки на поверхности в диаметрально противоположную точку поверхности сферы уравнение (16) совпадает с уравнением (15), так как $n(0)=2$, $s=1$.

2. Градиентный сферически-симметричный фокусатор в радиально-симметричные области, выполненный в виде полу-шара

В работах [8, 9] рассмотрен расчет сферических градиентных оптических элементов, предназначенных для фокусировки излучения, исходящего из точечного источника, в радиально-симметричную область с произвольным распределением интенсивности в некоторой плоскости за оптическим элементом.

В данном разделе получим интегральное уравнение для расчета градиентного сферически-симметричного оптического элемента, выполненного в виде полу-шара и фокусирующего пучок параллельных лучей, падающих на плоскую поверхность полу-шара, в радиально-симметричную область с произвольным распределением интенсивности в некоторой плоскости за оптическим элементом.

На рис. 2 показан ход произвольного луча в градиентном полу-шаре со сферической зависимостью показателя преломления.

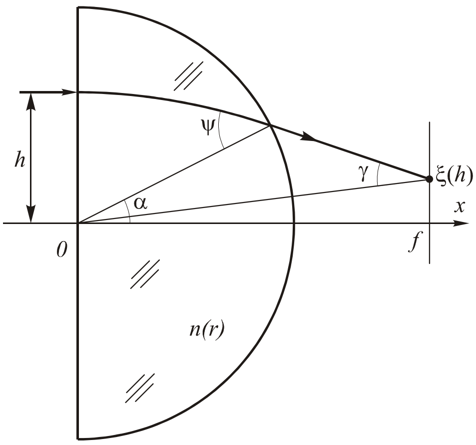

Рис.2 Оптическая схема для расчета сферически-симметричного градиентного полу-шара, фокусирующего параллельный пучок лучей, падающий на плоскую поверхность полу-шара, в произвольную радиально-симметричную область с заданным распределением интенсивности в плоскости, находящейся от центра элемента на расстоянии f.

Из рис. 2 можно установить следующие геометрические соотношения (радиус шара - 1, $n(1) = 1$):

$$\sin\gamma=\frac{\sin\psi}{\sqrt{f^2+\xi^2}}, \tag{17}$$

$$\alpha=\pi-\psi-\gamma+\operatorname{arctg}\frac{\xi}{f}, \tag{18}$$

$$\psi=\pi-\theta=\pi-\arcsin h, \tag{19}$$

где $\xi = \xi(h)$ – точка фокальной плоскости, в которую приходит луч, упавший на градиентный оптический элемент параллельно оптической оси z на расстоянии h от нее, r^* – минимальное расстояние луча от центра, $h = n(r^*)r^*$ – параметр луча, который в произвольной точке вдоль по ходу луча внутри оптического элемента выражает закон Снелиуса:

$$h=n(r)r\sin\psi, \tag{20}$$

где ψ - угол между лучом и радиусом.

В уравнение (1), которое верно для любого луча в градиентной среде со сферически-симметричным показателем преломления, надо подставить в данном случае следующие величины: $r_2 = r^*$, $r_1 = 1$ и

$$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1=\frac{\pi-2`\alpha}{2}. \tag{21}$$

Тогда уравнение (1) с учетом выражений (21), (17)-(19) имеет вид:

$$\int_{r^*}^{1}\frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{n^2(r)r-h^2}}=\frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin h+\arcsin\frac{h}{\sqrt{f^2+\xi^2}}-\operatorname{arctg}\frac{\xi}{f}}{h}, \tag{22}$$

где $h = n(r^*)r^*$.

Заметим, что в пределе $\xi \to 0$ вместо уравнения (22) получится уравнение (3) для обобщенной линзы Максвелла «рыбий глаз».

Решать уравнение (22) можно с помощью пары преобразований Абеля (4) и (5).

Для сведения уравнения (22) к уравнению (5) введем обозначения: $n(r)r = \rho$, $F(\rho) = \ln n(r) = \ln m(\rho)$. Учтем, что $F(1) = \ln n(1) = \ln 1 = 0$. Тогда уравнение (22) перепишется в виде:

$$-\frac{1}{\pi}\int_{x}^{1}\frac{\frac{\mathrm{dF}(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{d}\rho}{\sqrt{\rho^2-h^2}}=-\frac{1}{\pi}\mathrm{S}(h), \tag{23}$$

где:

$$\mathrm{S}(h)=\frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin h+\arcsin\frac{h}{\sqrt{f^2+\xi^2(h)}}-\operatorname{arctg}\frac{\xi(h)}{f}}{h}. \tag{24}$$

Уравнение (23) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (5). Тогда функцию $F(\rho)$ можно найти с помощью уравнения Абеля (4):

$$\mathrm{F}(\rho) = -\frac{2}{\pi}\int_{\rho}^{1}\frac{\mathrm{S}(h)h\mathrm{d}h}{\sqrt{h^2-\rho^2}}\,. \tag{25}$$

Подставив уравнение (24) в уравнение (25) получаем:

$$\mathrm{F}(\rho) = -\int_{\rho}^{1}\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h^2-\rho^2}} + \frac{2}{\pi}\int_{\rho}^{1}\frac{\arcsin h\mathrm{d}h}{\sqrt{h^2-\rho^2}} -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_{\rho}^{1}\frac{\arcsin\left(\frac{h}{\sqrt{f^2+\xi^2(h)}}\right)\mathrm{d}h}{\sqrt{h^2-\rho^2}} + \frac{2}{\pi}\int_{\rho}^{1}\frac{\mathrm{arctg}\left(\frac{\xi(h)}{f}\right)\mathrm{d}h}{\sqrt{h^2-\rho^2}}. \tag{26}$$

Первый и второй интегралы в уравнении (26) являются табличными (см. (8) и (9)), а третий и четвертый интегралы не вычисляются в элементарных функциях. Поэтому уравнение (26) сводится к следующему уравнению, сходному с уравнением (10):

$$F(\rho) = \ln r = -\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right) + $$

$$+\ln\left(1+\sqrt{1-\rho^2}\right) - \varphi_1 - \varphi_2, \tag{27}$$

где:

$$\varphi_1(\rho) = \frac{2}{\pi}\int_{\rho}^{1}\frac{\arcsin\left[\frac{h}{\sqrt{f^2+\xi^2(h)}}\right]\mathrm{d}h}{\sqrt{h^2-\rho^2}}, \tag{28}$$

$$\varphi_2(\rho) = -\frac{2}{\pi}\int_{\rho}^{1}\frac{\mathrm{arctg}\left[\frac{\xi(h)}{f}\right]\mathrm{d}h}{\sqrt{h^2-\rho^2}},\ \rho = n(r)r. \tag{29}$$

Окончательно для расчета радиальной зависимости показателя преломления градиентного оптического элемента вместо (27) получим трансцендентное уравнение:

$$n(\rho) = \exp\varphi_1(\rho)\exp\varphi_2(\rho),\ \rho = n(r)r. \tag{30}$$

Аналитически интегралы в выражениях (28) и (29) не берутся, но они могут быть вычислены численно. Функцию $\xi(h)$ можно получить из условия сохранения энергии:

$$\int_0^h \mathrm{I}_0(h')h'\,\mathrm{d}h' = \int_0^{\xi}\mathrm{I}_1(\xi')\xi'\,\mathrm{d}\xi', \tag{31}$$

где $I_0(h)$ и $I_1(\xi)$ - распределения интенсивности в падающем плоском пучке и в плоскости фокусировки, соответственно.

Заметим, что уравнение (30) при фокусировке в точку на оси, то есть при $\xi(h)\to 0$, переходит в уравнение (11) для обобщенной линзы Максвелла.

3. Расчет градиентной линзы Итона-Липмана

В [7] приведен показатель преломления градиентной линзы Итона-Липмана, которая, как сферически-симметричное зеркало, любой луч, падающий на эту линзу, отражает назад. Показатель преломления такой линзы-зеркала имеет вид:

$$n(r) = n(R)\sqrt{\frac{2R}{r}-1}\,. \tag{32}$$

Приведем расчет показателя преломления для обобщенной линзы Итона-Липмана с помощью преобразования Абеля. Для простоты рассуждений и чтобы не учитывать отражение от границы линзы, примем $R = 1$ и $n(1) = 1$.

На рис.3 показан ход произвольного луча в сферически-симметричной обобщенной линзе Итона-Липмана, которая отражает (или преломляет) произвольный луч под некоторым заданным углом.

Повернем рис. 3 на угол α против часовой стрелки так, чтобы падающий пучок параллельных лучей распространялся вдоль оптической оси z. Тогда общее интегральное уравнение (1) для произвольного луча в данном случае примет вид:

$$\int_{r^*}^{1}\frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{n^2r^2-h^2}} = \frac{\pi-\alpha-\arcsin h}{h}, \tag{33}$$

где $h = n(r^*)r^*$, r^* – кратчайшее расстояние от луча до центра линзы, h – расстояние от луча до оси z, $\sin\theta = h$, $\theta_2 - \theta_1 = \pi - \alpha - \theta = \pi - \alpha - \arcsin h$,
$h = n(r)r\sin\psi$ – инвариант луча, ψ – угол между направлением луча и радиусом до центра линзы,
α – половина угла, на который разворачивает лучи данный градиентный оптический элемент.

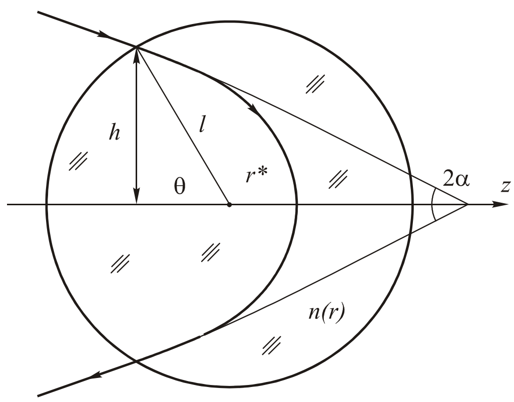

Рис. 3. Ход произвольного луча в обобщенной линзе Итона-Липмана, которая параллельный пучок лучей отражает под углом 2α

Уравнение (33) можно решить с помощью пары преобразований Абеля (4) и (5). Для этого введем обозначение: $F(p) = \ln r$, $n(r)r = \rho$, тогда вместо уравнения (33) запишем уравнение, аналогичное преобразованию Абеля (5):

$$-\frac{1}{\pi}\int_h^1\frac{\frac{\mathrm{d}F(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{d}p}{\sqrt{\rho^2-h^2}} = f(h), \tag{34}$$

где:

$$f(h) = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi-\alpha-\arcsin h}{h}\right]. \tag{35}$$

Обращая уравнение (34) с помощью преобразования Абеля (4), получим:

$$F(\rho)=2\int_{\rho}^{1}\frac{f(h)h\,\mathrm{d}\,h}{\sqrt{h^2-\rho^2}}=$$
$$=-\frac{2(\pi-\alpha)}{\pi}\int_{\rho}^{1}\frac{\mathrm{d}\,h}{\sqrt{h^2-\rho^2}}+\frac{2}{\pi}\int_{\rho}^{1}\frac{\arcsin h\,\mathrm{d}\,h}{\sqrt{h^2-\rho^2}}. \quad (36)$$

Интегралы в правой части уравнения (36) вычисляются в аналитических функциях (8), (9), поэтому вместо уравнения (36) можно записать уравнение

$$F(\rho)=\ln r=$$
$$=\frac{2(\pi-\alpha)}{\pi}\ln\left(\frac{\rho}{1+\sqrt{1-\rho^2}}\right)+\ln\left(1+\sqrt{1-\rho^2}\right). \quad (37)$$

С учетом того, что $\rho = n(r)r$, из уравнения (37) получим алгебраическое уравнение для расчета радиальной зависимости показателя преломления обобщенной линзы Итона-Липмана:

$$rn^{\nu}-2n^{\eta}+r=0\,, \quad (38)$$

где

$$\nu=\frac{2}{A-1}\,,\ \eta=\frac{2-A}{A-1}\,,\ A=2\left(\frac{\pi-\alpha}{\pi}\right). \quad (39)$$

Угол α меняется от 0 (отражение назад) до $\pi/2$ (прохождение без преломления). При отражении назад ($\alpha=0$) вместо уравнения (38) получим уравнение

$$rn^2-2+r=0\,, \quad (40)$$

решение которого легко получить:

$$n=\sqrt{\frac{2-r}{r}}\,. \quad (41)$$

Решение (41) совпадает с решением (32) при $n(R) = 1$ и $R = 1$. Заметим, что при $r\to 0$, $n(0)\to\infty$ особенность в нуле решения (39) делает реализацию линзы-зеркала невозможной. Однако наличие точного решения может облегчить поиск приближенного и реализуемого на практике распределения сферически-симметричного показателя преломления для линзы-зеркала, отражающей назад падающий с любой стороны луч.

Заключение

В работе получены следующие результаты:

- С помощью интегрального преобразования Абеля в рамках геометрической оптики получено и решено интегральное уравнение для обобщенной линзы Максвелла «рыбий глаз», выполненной в виде полу-шара и фокусирующий пучок параллельных лучей, падающий перпендикулярно на плоскую поверхность полу-шара, в точку на оптической оси за пределами элемента.
- Получено и решено интегральное уравнение для расчета градиентного оптического элемента со сферически-симметричной зависимостью показателя преломления, выполненного в виде полу-шара и фокусирующего параллельный пучок лучей, перпендикулярных плоской поверхности элемента, в радиально-симметричную область с заданным распределением интенсивности на плоскости, перпендикулярной оси пучка и находящейся за элементом.
- Получено и решено интегральное уравнение для расчета обобщенной линзы Итона-Липмана, которая любой луч отражает (или преломляет) на заданный угол.

Литература

1. Котляр В.В., Мелёхин А.С. Преобразование Абеля в задачах синтеза градиентных оптических элементов // Компьютерная оптика, вып. 22, с. 29-36, 2001.
2. Luneburg R.K. Mathematical Theory of Optics. Brown U. Press, Providence, R.I., 1944.
3. Morgan S.P. General solution of the Luneburg lens problem. // J. Appl. Phys., v. 29, p. 1358-1368, 1958.
4. Fletcher A., Murphy T., Young A. Solution of two optical problems. // Proc. R. Soc. London, Ser. A, v. 223, p. 216-225, 1954.
5. Микаэлян А.Л. Применение слоистой среды для фокусирования волн // Доклады академии наук СССР, т. LXXXI, с. 569–571, 1951.
6. Maxwell J.C. Scientific Papers. v. 1, Cambr. Univ. Press, 1890.
7. Физическая энциклопедия. Т. 2, М., Наука.
8. Flores J.R. Gradient-index with spherical symmetry. // J. of Modern Optics, v.46, no.11, p.1513-1525, 1999.
9. Flores J.R. Spherically symmetric GRIN amplitude formers. // J. of Modern Optics, v. 48, no. 7, p. 1225-1238, 2001.
10. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., Наука, 1973.
11. Greishuk G.I., Bobrov S.T., Stepanov S.A. Optics of diffractive and gradient–index elements and systems. SPIE Press, Bellingham, 1997.
12. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. М., Наука, 1981.