

ПРИМЕНЕНИЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ СВОЙСТВ СОБСТВЕННЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ОПЕРАТОРА РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТА В ЛИНЗОПОДОБНОЙ СРЕДЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМПЬЮТЕРНОЙ ОПТИКИ

В.С. Павельев

Самарский государственный аэрокосмический университет
Институт систем обработки изображений РАН

Аннотация

Данная работа посвящена исследованию замечательных свойств собственных подпространств оператора распространения света в линзоподобной среде.

Введение

Под *линзоподобными средами* принято понимать среды, в которых показатель преломления является убывающей функцией расстояния от оптической оси [1]. Одним из наиболее распространенных примеров является среда с параболическим профилем, показатель преломления в которой распределен по закону

$$n^2(r) = n_1^2 \left(1 - 2\Delta r^2/a^2\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1)$$

Интерес к средам с параболическим профилем связан с тем, что анализ распространения света в них хорошо аппроксимирует анализ многомодовых волокон с параболическим профилем [2], а также с наличием аналитических решений для мод таких сред [2,3]. Под оператором распространения света будем понимать оператор \tilde{P} : $w(x, y, z) = \tilde{P}w(x, y, 0)$, связывающий комплексную амплитуду света $w(x, y, z)$ в плоскости z с исходным комплексным распределением $w(x, y, 0)$.

В [2,3] показано, что собственными функциями оператора распространения света в такой среде будут являться модовые функции Гаусса-Эрмита и Гаусса-Лагерра. В работах [3,4] рассмотрена задача формирования и селекции мод Гаусса-Эрмита и Гаусса-Лагерра методами компьютерной оптики. В работах [3,4] задачу формирования гауссовых мод предложено решать как задачу синтеза цифровой голограммы образа, заданного амплитудно-фазовым распределением в сечении гауссовой моды. Такой подход обладает рядом недостатков: в частности отличия амплитудного распределения формируемой моды от амплитудного распределения в сечении освещающего пучка (типично гауссового, либо близкого к равномерному) приводят к невысокой энергетической эффективности голограммы [3]. В [5,6] рассмотрены подходы к решению проблемы формирования мод Гаусса-Лагерра и Гаусса-Эрмита с большей эффективностью, однако все они основаны на "подмешивании" в формируемую моду паразитных (вспомогательных) мод.

Учитывая актуальность задачи формирования одномодовых распределений в линзоподобных средах, обусловленную, главным образом, потенциальными телекоммуникационными приложениями [3,6], представляется целесообразным рассмотреть возможность поиска собственных функций операторо-

ра распространения в линзоподобной среде, отличных от известных аналитических решений Гаусса-Эрмита и Гаусса-Лагерра.

Предлагается переформулировать задачу - найти собственную функцию $\psi_m(x, y)$, соответствующую определенному собственному числу λ_m оператора распространения света в линзоподобной среде \tilde{P} , имеющую амплитудное распределение, максимально близкое к распределению освещающего пучка $|\psi_m(x, y)| \cong A(x, y)$. В этом случае фаза $\varphi(x, y) = \arg(\psi_m(x, y))$ может быть выбрана в качестве фазовой функции формирующего оптического элемента.

1. Собственные подпространства оператора распространения света в линзоподобной среде

Собственные значения оператора распространения света в линзоподобной среде можно найти, пользуясь соответствующим характеристическим уравнением [2]. Для среды с распределением (1):

$$\lambda_m = \exp(i\beta_m z), \quad (2)$$

$$\beta_m = \sqrt{k^2 n_1^2 - 4/\sigma^2 (m+1)}, \quad (3)$$

$$\sigma = (\lambda a / \pi n_1)^{1/2} (1/2\Delta)^{1/4}, \quad (4)$$

где λ - длина волны излучения, волновое число $k = 2\pi/\lambda$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Для того, чтобы найти собственные функции $\psi_m(x, y)$: $\tilde{P}\psi_m = \lambda_m \psi_m$, необходимо найти решения уравнение Гельмгольца

$$\nabla_{\perp}^2 \psi_m(x, y) + [k^2 n^2(x, y) - \beta_m^2] \psi_m(x, y) = 0, \quad (5)$$

где $\nabla_{\perp} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$.

В предположении

$$\psi_m(x, y) = \Phi_p(x) \Phi_l(y) \quad (6)$$

решениями уравнения (5) будут моды Гаусса-Эрмита [3]

$$\psi_m = \Phi_{pl}(x, y) = E_{pl} \cdot \Phi_p(x) \Phi_l(y), \quad (7)$$

где

$$E_{pl} = \sqrt{2/(\pi \cdot 2^{p+l} \cdot p! \cdot l!)} / \sigma \quad (8)$$

- нормировочная константа, $m = p + l$,

$$\Phi_n(x) = H_n(\sqrt{2}x/\sigma) \exp(-x^2/\sigma^2) \quad (9)$$

Отметим, что:

1. Моды (7) образуют ортогональный базис в L_2 [3].
2. Предположение (6) вовсе не следует из постановки задачи и сделано для получения аналитических решений (7-9).
3. Любое решение, соответствующее собственному значению λ_m , представимо в виде линейной комбинации решений $\Phi_{p(m-p)}(x, y)$. Таким образом, оператор \tilde{P} будет обладать собственными числами (2) с соответствующими линейными собственными подпространствами решений

$$\Psi_m = \left\{ \psi_m : \psi_m(x, y) = \sum_{p=0}^m \tilde{C}_{p(m-p)} \Phi_{p(m-p)}(x, y) \right\} \quad (10)$$

Пучки, сечения которых описываются элементами подпространств (10) с количеством слагаемых ряда более одного, в [7] названы *инвариантными многомодовыми пучками*, а в [8] - *многомодовыми бездисперсионными пучками*. Выпишем некоторые свойства собственных подпространств оператора \tilde{P} :

1. Световые пучки, распределение комплексной амплитуды в сечении которых описывается функциями-элементами собственных подпространств (10) оператора \tilde{P} , обладают свойством *самовоспроизведения* в среде с параболическим профилем, т.е. являются ее *модами*.

2. Любые две функции $\psi_n(x, y) \in \Psi_n$, $\psi_m(x, y) \in \Psi_m$ являются ортогональными в L_2 .

3. λ_0 является *единственным простым* собственным значением оператора \tilde{P} с соответствующей собственной функцией $\psi_{00}(x, y)$.

4. Собственному числу λ_1 соответствует собственное подпространство $\Psi_1 = \{ \psi : \psi_1(x, y) = \tilde{C}_{01} \Phi_{01}(x, y) + \tilde{C}_{10} \Phi_{10}(x, y) \}$, однако любая функция $\psi_1(x, y) \in \Psi_1$ совпадает с модовой функцией Гаусса-Эрмита $\Phi_{01}(x, y)$ с точностью до поворота вокруг начала координат.

5. Поведение пучков, сечения которых описываются функциями (10), в свободном пространстве и при прохождении Фурье - каскада аналогично поведению отдельных мод Гаусса-Эрмита [3].

Таким образом, задача синтеза ДОЭ, предназначенного для формирования одиночной моды линзоподобной среды, может быть поставлена по-разному:

1) формирование конкретной моды, заданной своим амплитудно-фазовым распределением $\psi_m(x, y)$ или фиксированными значениями комплекснозначных коэффициентов $\tilde{C}_{p(m-p)}$. В этом случае применимы методы цифровой голографии, развитые для формирования заданного амплитудно-фазового распределения [3]. Такой подход приме-

ним, например, в задаче формирования эталонного мод [3]. Постановка задачи формирования модового пучка, заданного распределением комплексной амплитуды $\psi_m(x, y)$ в его поперечном сечении или фиксированными значениями коэффициентов $\tilde{C}_{p(m-p)}$, в некоторой области выходной плоскости представлена на Рис. 1.

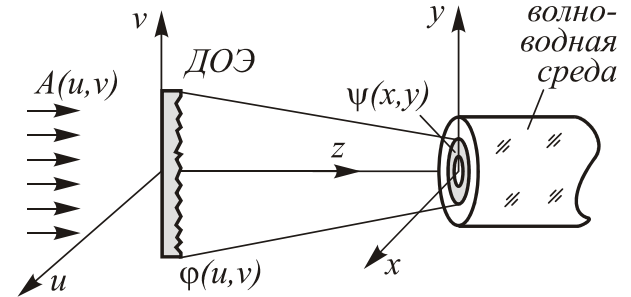


Рис.1. Постановка задачи формирования модового пучка, заданного распределением комплексной амплитуды $\psi(x, y)$ в его поперечном сечении.

2) Поиск собственной функции $\psi_m(x, y)$ над подпространством (10) с амплитудой, максимально близкой к амплитуде освещающего пучка $A(x, y)$. Такой подход представляется перспективным для решения задач телекоммуникаций, а также для передачи световой энергии в волноводной среде с минимальными потерями энергии на межмодовую дисперсию (Рис. 2).

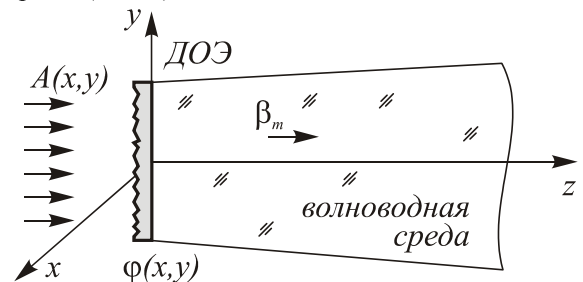


Рис.2. Постановка задачи формирования модового пучка, заданного распределением амплитуды в поперечном сечении освещающего пучка $A(x, y)$ и значением постоянной распространения β_m .

Для эффективного решения задачи 2) в случае параболического профиля необходимо решить уравнение

$$A(x, y) \exp(i\phi(x, y)) - \sum_{p=0}^m \tilde{C}_{p(m-p)} \Phi_{p(m-p)}(x, y) = 0, \quad (11)$$

где $A(x, y)$ – распределение амплитуды освещающего пучка в плоскости установки ДОЭ, $\phi(x, y)$ - фазовая функция ДОЭ, относительно коэффициентов $\tilde{C}_{p(m-p)}$.

Для численного нахождения приближенного решения уравнения (11) можно использовать максимизацию функционала

$$\Phi(\varphi(x, y)) = \sum_{p=0}^m \tilde{C}_{p(m-p)}^2 \rightarrow \max, \quad (12)$$

$$\tilde{C}_{p(m-p)}^2 = \left| \iint_D A(x, y) \exp(i\varphi(x, y)) \Psi_{p(m-p)}(x, y) dx dy \right|^2. \quad (13)$$

2. Результаты численного эксперимента

В данной работе проводился расчет ДОЭ, осуществляющего эффективное формирование пучка, сечение которого описывается собственной функцией оператора распространения света в среде с параболическим профилем. В качестве освещающего пучка рассматривался гауссов пучок. Вычислительный эксперимент ставился для следующих параметров: апертура ДОЭ $D = 6$ мм, индекс m выбирался равным 2 и 3, радиус гауссова освещающего пучка $\sigma_0 = 1,7$ мм, радиус формируемого пучка $\sigma = 1$ мм, число уровней квантования фазовой функции $M = 32$, число отсчетов фазовой функции выбиралось $N = 32, 64, 128$. Оптимизация функционала (12) проводилась с помощью стохастической процедуры, использующей методы целочисленного программирования. Результаты вычислительного эксперимента приведены в Табл. 1-3. На Рис.3 приведены рассчитанные фазовые функции оптических элементов.

Таблица 1. Значение функционала Φ при различных значениях индекса m и числа отсчетов фазовой функции N

Количество пикселей	Значение функционала (12) $m=2$	Значение функционала (12) $m=3$
$N=32*32$	0,859	0,78
$N=64*64$	0,867	0,793
$N=128*128$	0,869	0,795

Таблица 2. Удельная мощность отдельных мод Гаусса-Эрмита в формируемом пучке ($m=2$)

Номер моды Гаусса-Эрмита	(0,2)	(2,0)	(1,1)
Удельная мощность в пучке, $\tilde{C}_{p(m-p)}^2$	0,43	0,43	0,0

Таблица 3. Удельная мощность отдельных мод Гаусса-Эрмита в формируемом пучке ($m=3$)

Номер моды Гаусса-Эрмита	(1,2)	(2,1)	(0,3)	(3,0)
Удельная мощность в пучке, $\tilde{C}_{p(m-p)}^2$	0,29	0,04	0,27	0,18

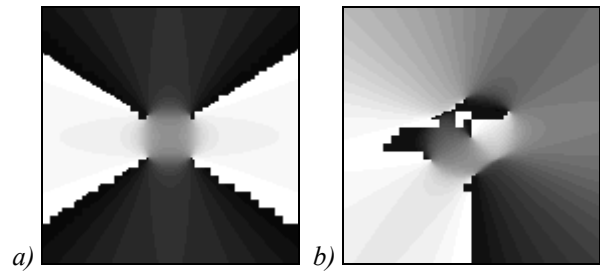


Рис. 3. Рассчитанные фазовые функции ДОЭ (a – для $m=2$, b – для $m=3$)

На Рис. 4 представлено распределение амплитуды в сечении освещающего пучка.

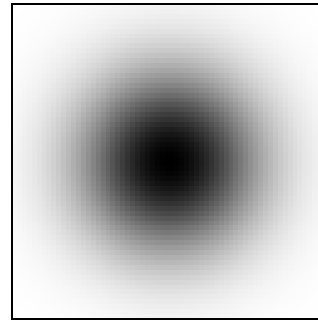


Рис. 4. Распределение амплитуды в сечении гауссова освещающего пучка

На Рис. 5 представлены распределения амплитуды в сечении пучков вида $\sum_{p=0}^m \tilde{C}_{p(m-p)} \Psi_{p(m-p)}(x, y)$,

где коэффициенты $\tilde{C}_{p(m-p)}$ найдены оптимизацией функционала (12) для приведенных выше параметров. Таким образом, оптимизируя функционал (12), можно подобрать собственное решение для $m=2$ и $m=3$, аппроксимирующее гауссов пучок.

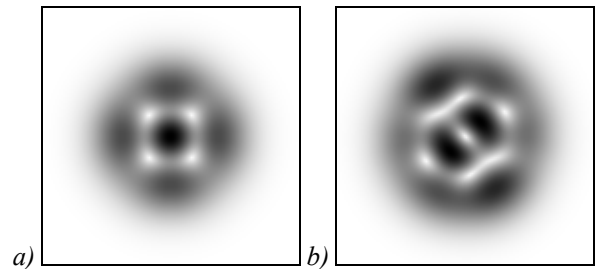


Рис. 5. Распределение амплитуды в сечении пучков (a - $m=2$, b - $m=3$)

На Рис.6 представлены распределения амплитуды в дальней зоне в сечении пучков, полученных после прохождения освещающего гауссова пучка через рассчитанные фазовые элементы.

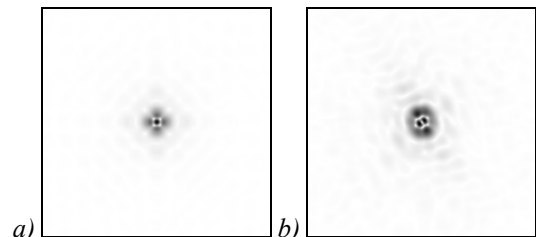


Рис. 6. Распределение амплитуды в дальней зоне

Отметим что структура распределений амплитуды в центре Рис.6а,б близка к структуре соответствующих распределений амплитуды, представленных на Рис.5. Это объясняется тем, что погрешность аппроксимации Гауссова распределения амплитуды распределениями, приведенными на Рис.5, соответствует наличию высших мод в сформированном пучке.

Заключение

Наличие непротых собственных значений λ_m оператора распространения \tilde{P} света в линзоподобной среде позволяет поставить задачу поиска в соответствующем собственном подпространстве собственной функции $\psi_m(x, y)$ с амплитудой, максимально близкой к амплитуде освещающего пучка $A(x, y)$. Задача синтеза ДОЭ, формирующего моду линзоподобной среды, таким образом, может быть решена в два этапа:

- поиск собственной функции с амплитудным распределением, максимально близким к распределению освещающего пучка.
- реализация ДОЭ с фазовой функцией, определяемой фазой найденной собственной функции.

Представляется что такой подход к формированию мод линзоподобных сред (или других волноводных сред) может быть востребован при решении задач оптических телекоммуникаций, а также при передаче световой энергии с минимальными потерями на дисперсию.

Литература

1. Солимено С., Крозиньяни Б., Порто Ди П. *Дифракция и волноводное распространение оптического излучения*, М.: Мир, 1989.
2. Адамс М. *Введение в теорию оптических волноводов*. (М.: Мир, 1984)
3. Soifer V.A., Golub M.A. *Laser Beam Mode Selection by Computer Generated Holograms*. (CRC Press. 1994), 250p.
4. Голуб М.А., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А. // *Квантовая электроника*. 9 (9) 1866-1868 (1982).
5. Soifer V.A., Pavelyev V.S., Duparre' M., Kowarschik R., Luedge B., Kley B. *Forming of selected unimodal complex amplitude distribution by means of novel DOEs of modan-type* // *Proceedings SPIE*, 1998, vol. 3134 pp. 357-368.
6. Павельев В.С., Сойфер В.А., Глава 6 «Селекция мод лазерного излучения» // «Методы компьютерной оптики» под ред. В.А. Сойфера, М. «Физматлит», 2000, с.395-469.
7. Pavelyev V.S., Duparré M., Luedge B., Soifer V.A., Kowarschik R., Golovashkin D.L. Invariant laser beams - fundamental properties and their investigation by computer simulation and optical experiment. // *Компьютерная оптика*, 1999, №19, с.88-95.
8. Павельев В.С., Карпеев С.В., Дюпарре' М., Людге Б., Рокштулл К., Шротер З. Исследование поперечно-модового состава бездисперсионных многомодовых пучков с помощью корреляционных фильтров. // *Компьютерная оптика*, 2002, №23, с.10-14.