

СОЕДИНЕНИЕ ОПОРНЫХ ЛИНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛЯ НАПРАВЛЕНИЙ

А.В. Устинов

Институт систем обработки изображений РАН
Самарский государственный аэрокосмический университет

Аннотация

В данной статье рассматривается задача восстановления связности опорных линий на квазипериодических изображениях. При этом выполняется условие сохранения формы кривой. Описываются три метода: модифицированное протягивание линии вдоль поля направлений и два варианта решения вариационной задачи - конечно-разностный метод и использование уравнения Эйлера-Лагранжа.

Введение

Многие изображения естественного и искусственного происхождения характеризуются наличием квазипериодических структур. Они определяются наличием многоконтурной упорядоченной текстуры с выраженной ориентацией. В каждой малой области квазипериодической структуры функция яркости является периодической вдоль некоторого направления и визуально выражается в системе параллельных полос. Примеры таких изображений приведены на рис. 1.

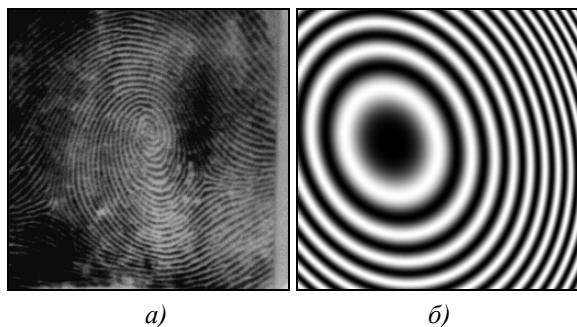


Рис. 1. Квазипериодические изображения:
а) дактилограмма, б) интерферограмма

Одним из методов анализа таких изображений является использование опорных линий, под которыми понимаются центры светлых и (или) темных полос. Из-за наличия шумов и дискретизации изображения линии центров полос могут оказаться разорванными. Поэтому необходим этап устранения разрывов опорных линий, причём важно не просто соединить точки разрыва, но и по возможности более точно восстановить форму кривой на участке разрыва.

Предлагаемые алгоритмы используют поле направлений [1], поэтому мы ограничиваемся квазипериодическими изображениями, так как только для этого класса возможно достаточно точное построение поля направлений. Под углом поля направлений $\psi(x, y)$ по определению понимается угол наклона касательной к линии уровня функции яркости изображения в точке (x, y) . Возможно использование описываемых алгоритмов и для изображений *древовидных структур* (протяжённые древовидные или сетчатые объекты, определяемые такими понятиями, как узлы и ветви; пример на рис. 2), но необходимо проведение экспериментов, которые могут доказать его правомерность.

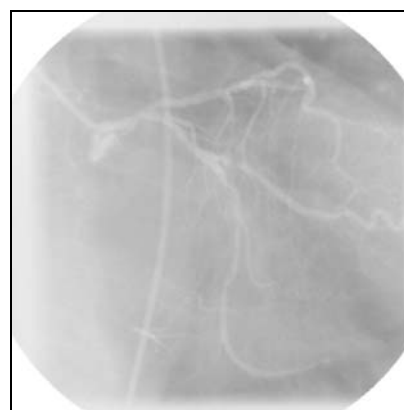


Рис. 2. Древовидная структура – сосуды сердца

Выбор соединяемых точек

В целом процесс обработки квазипериодических изображений во многих случаях состоит из нескольких стадий, последней из которых посвящена данная статья:

1. Фильтрация шумов.
2. Построение поля направлений фильтрованного изображения.
3. Выделение опорных линий на фильтрованном изображении.
4. Фильтрация изображения опорных линий.
5. Нахождение всех точек разрыва и выбор соединяемых точек.
6. Соединение выбранных точек.

Выбор точек, подлежащих соединению, является достаточно сложной задачей, которая лучше решается при наличии некоторой априорной информации об исследуемом изображении, форме и направлении опорных линий. Один из алгоритмов приведён в работе [2]. Другой алгоритм состоит в следующем. Если начальная точка разрыва задана, то конечная ищется из условия минимума функционала (см. ниже формулу (8)) в предположении, что разрыв соединяется *прямой линией*.

Так как в статье нет привязки к конкретному типу изображений, предполагается, что подлежащие соединению точки разрывов уже заданы.

Модифицированное протягивание линий вдоль поля направлений

Пусть нам известна начальная точка разрыва (x_0, y_0) . В этом случае задачу нахождения кривой

можно рассматривать как задачу Коши. Она будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases} \quad (1)$$

где $f(x, y) = \operatorname{tg}\psi(x, y)$ - тангенс угла поля направлений в точке (x, y) .

Так как данный метод не использует информацию о конечной точке, нет гарантий, что мы придём в неё из-за погрешности поля направлений. Возможны ошибки трёх типов – «глобальный промах», попадание на линию за конечной точкой, попадание на соседнюю линию (см. рис. 3). Вместе с тем данный алгоритм имеет низкую вычислительную сложность. А главное, его можно использовать в случае нахождения точки разрыва вблизи границы изображения, когда конечная точка отсутствует.

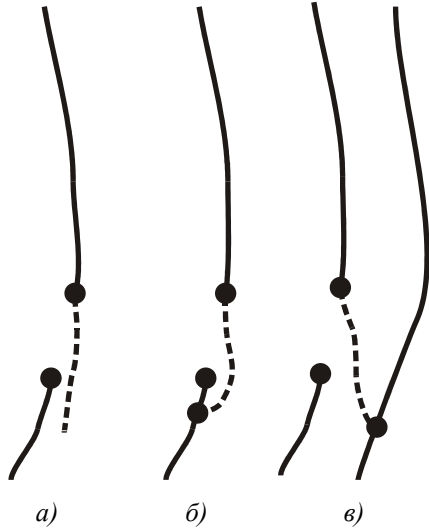


Рис. 3. Виды ошибок в методе протягивания линий

Если известны как начальная (x_0, y_0) , так и конечная (x_s, y_s) точки разрыва, можно значительно повысить точность соединения путём следующей модификации алгоритма. В дальнейшем будем считать, что

$$y_0 = y_s \text{ и } x_0 < x_s. \quad (2)$$

Этого всегда можно добиться поворотом системы координат.

Так как имеются две точки, можно получить две линии, решив соответствующие задачи Коши:

$$\begin{cases} \mathcal{F}' = f(x, \mathcal{F}) \\ y_0 = \mathcal{F}(x_0) \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \tilde{y}' = f(x, \tilde{y}) \\ y_s = \tilde{y}(x_s) \end{cases}. \quad (3)$$

С учётом дискретности решение получаем в виде двух последовательностей $\{\mathcal{F}\}_0^N$ и $\{\tilde{y}\}_0^N$, причём во второй последовательности нумерация также идёт от точки (x_0, y_0) . В последовательности $\{\mathcal{F}\}_0^N$ наиболее точными являются первые члены, а в последовательности $\{\tilde{y}\}_0^N$ – последние. Исходя из этого, можно получить более точную последовательность $\{\bar{y}\}_0^N$ при помощи взвешивания:

$$\bar{y}_i = w_i \mathcal{F}_i + (1 - w_i) \tilde{y}_i, \quad 0 \leq w_i \leq 1, \quad i \in [0; N], \quad (4)$$

где $\{w_i\}_0^N$ - некоторая весовая последовательность, причём $0 \leq w_i \leq 1, i \in (0; N), w_0 = 1, w_N = 0$. Примером такой весовой последовательности может служить последовательность, изменяющаяся по линейному закону:

$$\bar{y}_i = w_i = (N - i) / N, \quad i \in [0; N]. \quad (5)$$

Этот метод гарантирует соединение начальных и конечных точек и не допускает ошибок, свойственных основному методу (рис. 4). При этом он сохраняет присущую основному алгоритму скорость и простоту реализации.



Рис. 4. Иллюстрация модифицированного алгоритма протягивания линий

Нахождение оптимальной кривой соединения

Задачу нахождения кривой, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x_s, y_s) , можно рассматривать как задачу минимизации следующего функционала:

$$F = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_s, y_s)} |e^{i2\alpha(x, y)} - e^{i2\psi(x, y)}|^2 ds, \quad (6)$$

где $\alpha(x, y)$ – угол наклона искомой кривой ($\operatorname{tg}\alpha = y'$), $\psi(x, y)$ – угол поля направлений. На рисунке 5 приведена геометрическая иллюстрация расстояния, используемого в функционале.

$$\rho = |e^{i2\alpha} - e^{i2\psi}| = 2|\sin(\alpha - \psi)|. \quad (7)$$

Учитывая (7), функционал (6) можно записать в следующем виде:

$$F = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_s, y_s)} \sin^2(\alpha - \psi) ds. \quad (8)$$

Ниже рассматриваются два метода нахождения минимума функционала (8).

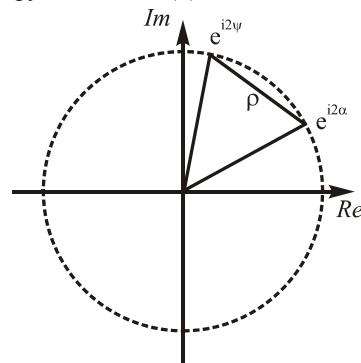


Рис. 5. Иллюстрация углового расстояния

Минимизация функционала при помощи решения уравнения Эйлера-Лагранжа

После преобразования подынтегрального выражения

$$\sin^2(\alpha - \psi) = \frac{y'^2 \cos^2 \psi + \sin^2 \psi - y' \sin^2 2\psi}{1 + y'^2} \quad (9)$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

получаем следующую вариационную задачу. Найти минимум функционала

$$F = \int_{x_0}^{x_s} (y'^2 \cos^2 \psi + \sin^2 \psi - y' \sin^2 2\psi) \frac{dx}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (10)$$

при краевых условиях:

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_s = y(x_s) \end{cases} \quad (11)$$

Функция, реализующая минимум функционала, должна удовлетворять уравнению Эйлера-Лагранжа[3]:

$$\Phi_y - \frac{d}{dx} \Phi_{y'} = 0, \quad (12)$$

где $\Phi = \Phi(x, y, y')$ - подынтегральная функция; $\Phi_y, \Phi_{y'}$ - частные производные Φ по y и y' соответственно. Подставляя подынтегральную функцию из (10) в (12), получаем:

$$\begin{aligned} & (1 + y'^2) \left(y'^2 \frac{\partial f_1}{\partial y} + y' \frac{\partial f_2}{\partial y} - y' \frac{\partial f_3}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{3y'y''}{1 + y'^2} (2y'f_1 - f_3 + y'^3 f_1 - y'f_2) + \\ & + y''f_1 (2 + 3y'^2) + (2 + y'^2) \left(y' \frac{\partial f_1}{\partial x} + y'^2 \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) - \\ & - y''f_2 - y' \frac{\partial f_2}{\partial x} - y'^2 \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_3}{\partial x} - y' \frac{\partial f_3}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$f_1 = \cos^2(\psi(x, y)); f_2 = \sin^2(\psi(x, y)); f_3 = \sin^2(2\psi(x, y)).$$

Получили дифференциальное уравнение второго порядка с краевыми условиями (11). Строго говоря, мы имеем ещё два краевых условия – значения производных на концах отрезка также известны. Но эти условия невозможно использовать, так как дифференциальное уравнение второго порядка не может иметь четыре произвольных постоянных.

Полученное уравнение громоздко и нелинейно относительно производных, что не позволяет применять «однопроходные» методы типа метода прогонки. Решение же методом пристрелки требует значительно большего объёма вычислений. Кроме того, функции f_1, f_2, f_3 не выражаются аналитически, поэтому, учитывая погрешность оценки поля направлений, следует ожидать значительные погрешности при вычислении производных этих функций по разностной схеме.

Исходя из вышесказанного, попробуем упростить полученное уравнение. Для этого вместо расстояния по хорде (7) используем расстояние по линии тангенсов (рис. 6):

$$r = |\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \psi| = |y' - \operatorname{tg} \psi|. \quad (14)$$

При условии (2) это вполне правомерно. Это же условие при предположении, что длина разрыва

не велика по сравнению с радиусом кривизны линии, позволяет интегрировать не по ds , а по dx .

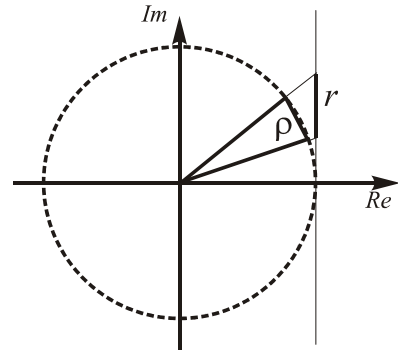


Рис. 6. Другая форма углового расстояния

В результате вместо функционала (10) имеем следующий функционал:

$$F = \int_{x_0}^{x_s} (y' - f)^2 dx, \quad (15)$$

где $f = \operatorname{tg}(\psi(x, y))$. Краевые условия (11) сохраняются. Соответствующее уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$2y'' - f \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (16)$$

И в этом случае мы получаем нелинейную краевую задачу, так как f зависит от x и y , но уравнение имеет значительно более простой вид, что сократит объём вычислений. Полученную задачу можно решить методом пристрелки, рассмотрев задачу Коши и варьируя значение y'_0 :

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{2} \left(f \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ y_0 = y(x_0) \\ y'_0 = y'(x_0) \end{cases} \quad (17)$$

За начальное приближение y'_0 берём тангенс угла поля направлений в точке (x_0, y_0) .

Метод конечных разностей

Как уже отмечалось выше, вычисление производных поля направлений происходит со значительной погрешностью. Кроме того, при решении задачи Коши любым численным методом погрешность увеличивается по мере отдаления от начальной точки. Однако есть возможность избавиться и от вычисления производных поля направлений и, вообще, от решения дифференциального уравнения. Для этого применяется метод, несколько напоминающий *прямые методы* решения вариационных задач [3].

Рассмотрим (8) в виде

$$F = \int_{x_0}^{x_s} \sin^2(\alpha - \psi) \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (18)$$

Краевые условия (11) сохраняются. Запишем приближённое значение функционала по квадратурной формуле трапеций:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{F} = \frac{f_0 + f_N}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f_i \rightarrow \min \\ f_i = \sin^2(\arctg y'_i - \psi(x_i, y_i)) \sqrt{1 + y_i'^2}, i \in [0, N] \\ x_i = x_0 + h \cdot i, i \in [0, N] \\ y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, i \in [0, N] \\ y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h}, y'_N = \frac{y_N - y_{N-1}}{h} \\ h = \frac{x_s - x_0}{N} \\ y_0 = y(x_0), y_N = y_s = y(x_s). \end{array} \right. \quad (19)$$

Здесь N – количество звеньев в разбиении. Таким образом, мы заменили задачу минимизации функционала задачей минимизации функции $N-1$ переменной, то есть задачей поиска вектора $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{N-1})$. При этом все точки разбиения равноправны, и погрешность будет примерно одинаковой по всему отрезку интегрирования. Хотя объём вычислений увеличивается по сравнению с решением дифференциального уравнения, но при реальной длине разрывов это увеличение не очень существенно.

Если используется один из методов спуска, то в качестве начального приближения можно взять значения, соответствующие соединению точек разрыва прямой линией. Но сходимость можно улучшить, если взять более точное начальное приближение – например, полученное при помощи модифицированного протягивания линии вдоль поля направлений.

Экспериментальные исследования

Для исследования были программно реализованы три из описанных выше алгоритмов: модифицированное протягивание линии вдоль поля направлений; минимизация функционала (в упрощённой форме (15)) при помощи уравнения Эйлера-Лагранжа; комбинация протягивания линии вдоль поля направлений и метода конечных разностей.

Зависимость погрешности соединения линий от различных параметров изучалась на синтезированном тестовом изображении (рис. 7).

Поле направлений использовалось не теоретически рассчитанное, а построенное при помощи дисперсионного метода с интерполяцией и последующего сглаживания. Точки разрыва создавались искусственно.

Зависимость погрешности от радиуса кривизны опорной линии. Для исследования были взяты разрывы с постоянной длиной, но различным удалением от центра изображения. Результаты показали, что в соответствии с априорными предположениями с увеличением радиуса кривизны погрешность уменьшается, причём вначале резко, а затем достаточно медленно. Такой вид зависимости можно объяснить тем, что при малом радиусе кривизны кроме влияния дискретизации сказывается большая погрешность построения поля направлений в центре изображения.

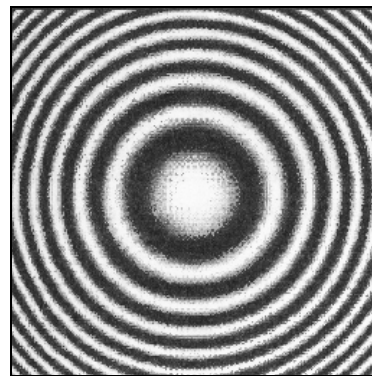


Рис. 7. Тестовое изображение

Зависимость погрешности от длины разрыва опорной линии. Для исследования были взяты разрывы с постоянным удалением от центра изображения, но различной длиной. Результаты показали, что, как и ожидалось, с увеличением длины разрыва погрешность увеличивается. При этом зависимость погрешности от длины разрыва имеет линейный характер (предполагаемый вид зависимости теоретически не определялся) вплоть до длины разрыва, примерно равной полутора радиусам кривизны опорной линии. Далее линейный вид нарушается – зависимость становится пилообразной. Это связано с тем, что при приближении разорванного участка к четверти окружности начинают нарушаться условия, имевшиеся в виду при построении алгоритмов.

Зависимость погрешности от угла наклона кривой в центре разрыва. Такое исследование было нужно по той причине, что растровое изображение имеет приоритетные направления. Для исследования были взяты разрывы с постоянным удалением от центра изображения и постоянной длиной, но с различным углом наклона. Результаты показали, что нет выраженной зависимости погрешности от угла наклона кривой.

Зависимость погрешности от отношения шум/сигнал. Исследования проводились при постоянных точках разрыва и изменяемой дисперсии шума. Результаты показали, что при возрастании отношения шум/сигнал (d^2) от 0 до 0,08 погрешность линейно увеличивается. При этом значительного увеличения не происходит – максимальное отклонение увеличивается на 2-2,5 пикселя; среднеквадратическое на 0,15 пикселей. Эти величины близки (при решении уравнения Эйлера-Лагранжа вдвое меньше) к погрешности при нулевом шуме.

Кроме того, методы испытывались на реальном изображении, полученном при структурном освещении изогнутого листа бумаги (рис. 8).

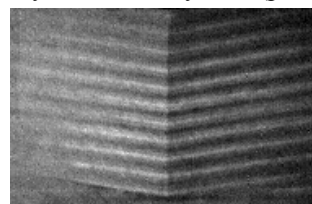


Рис. 8. Лист бумаги в структурном свете

На рис. 9 приведено бинарное изображение опорных линий, а на рисунке 10 – изображения после восстановления связности линий различными методами.

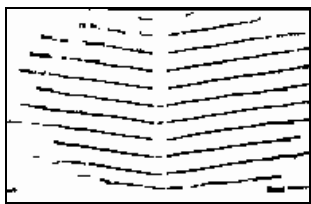


Рис. 9. Опорные линии с разрывами

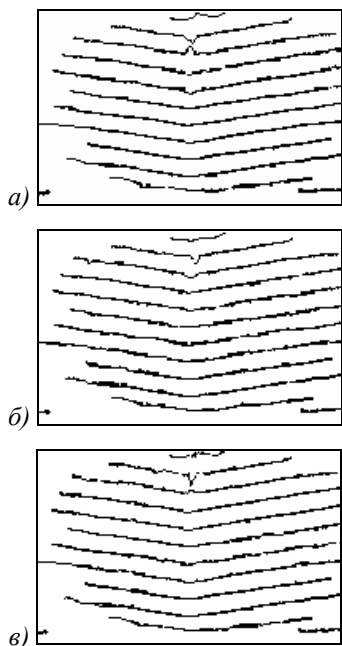


Рис. 10. Результат восстановления связности:
 а) метод протягивания вдоль поля направлений;
 б) метод решения уравнения Эйлера-Лагранжа;
 в) конечно-разностный метод

Заключение

Результаты экспериментов на тестовом изображении показали, что в общем случае точность метода минимизации функционала при помощи уравнения Эйлера-Лагранжа значительно меньше, чем у других методов, что можно объяснить низкой точностью вычисления частных производных поля направлений. Вместе с тем, на реальных изображениях результат получается вполне удовлетворительным, так как обычно длина разрыва и кривизна опорной линии невелики. Также выяснилось, что конечно-разностный метод при существенном увеличении объема вычислений при большой длине разрывов почти не даёт уменьшения погрешности по сравнению с протягиванием линий вдоль направлений. Правда это может быть связано с тем, что метод спуска приводит к локальному минимуму, ближайшему к начальному приближению, а не к глобальному минимуму. Поэтому можно надеяться на улучшение результата, если вместо метода спуска применить такой метод минимизации, который гарантирует достижение глобального минимума.

Описанные в статье методы можно применять для широкого класса задач, поэтому решение об использовании конкретного метода или комбинации методов лучше принимать в зависимости от типа изображений.

Литература

1. Ильясова Н.Ю., Устинов А.В., Храмов А.Г. Численные методы и алгоритмы построения полей направлений квазипериодических структур // Компьютерная оптика, 1998. В. 18. С. 150-165.
2. Ильясова Н.Ю., Ковалёв А.А., Куприянов А.В., Храмов А.Г. Восстановление связности линий на бинарных изображениях древовидных структур // Компьютерная оптика, 2002. В. 23. С. 58-61.
3. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения // М.: Наука, 1966.