

ЭФФЕКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЛОКАЛЬНОГО ДИСКРЕТНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В.В. Мясников^{1,2}

¹Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия,

²Самарский государственный аэрокосмический университет, Самара, Россия

Аннотация

Основной задачей настоящей работы является разработка нового класса вычислительно эффективных алгоритмов локального вейвлет-преобразования. Предполагается замена иерархической (пирамидально-рекурсивной) вычислительной конструкции, присущей известным алгоритму «с дырами» («algorithme a trous», М.Холшнайдер и др, 1989) [12] и алгоритму быстрого ортогонального вейвлет-преобразования (алгоритм С.Малла, 1987) [3,6,11], на (горизонтально-) рекурсивную, в которой вычисление коэффициентов вейвлет-преобразования производится для всех позиций вейвлета заданного масштаба последовательно, то есть в режиме «скользящего окна». Замена иерархической вычислительной конструкции на горизонтально-рекурсивную позволяет рассмотреть задачу построения базисных вейвлетов, которые удовлетворяют требованиям рекурсивности. Эта задача в общем случае включает в себя ряд подзадач, связанных с анализом основных классов вейвлетов: базисных (материнских), двухпараметрических, каркасов (фреймов), R-вейвлетов, полуортогональных и ортогональных. Настоящая работа посвящена вопросу построения эффективных алгоритмов для наиболее простого класса базисных (материнских) вейвлетов, а также определения условий/ограничений на вейвлеты, при которых такие алгоритмы существуют. Приводятся примеры новых и известных вейвлетов, для которых существуют эффективные (рекурсивные) алгоритмы вычисления локального дискретного вейвлет-преобразования.

Введение

Вейвлеты являются одним из эффективных инструментов пространственно-временного анализа данных. Во многих работах основной интерес представляют биортогональные и ортогональные вейвлеты [3,6,10,11,12]. Одной из причин этого является наличие для вейвлетов этих классов быстрого алгоритма вычисления вейвлет-разложения. Цель настоящей работы – показать, что существует подкласс вейвлетов, которые не обязательно являются ортогональными или биортогональными, но для которых существуют вычислительно эффективные алгоритмы расчета *дискретного вейвлет преобразования* (ДВП).

Работа организована следующим образом. В первом разделе приводятся известные понятия базисного (материнского) вейвлета, интегрального и дискретного вейвлет-разложения. Указываются условия существования обратного преобразования для вейвлет-преобразования сигнала.

Второй раздел содержит краткое изложение одного частного решения задачи построения эффективного алгоритма, рассмотренной ранее в работах автора [7,8]. В частности, в этом разделе приведен эффективный алгоритм вычисления дискретной линейной свертки, который порождается сплайн-представлением (дискретного) ядра свертки. Приведено выражение для сложности такого алгоритма как функции параметров дискретного обобщенного сплайна. Полное изложение результатов дано в работах [7,8].

В третьем разделе вводится понятие сплайн-вейвлетов как дискретных обобщенных сплайнов с конечным носителем, удовлетворяющих условию

обратимости интегрального вейвлет-преобразования. Доказывается, что сплайн-вейвлеты являются базисными вейвлетами. Для введенного класса сплайн-вейвлетов оказываются применимы все результаты второго раздела работы. А именно, любой сплайн-вейвлет произвольного (не обязательно целого) масштаба порождает эффективный алгоритм вычисления локального ДВП с конкретной вычислительной сложностью. Очевидная связь между сплайн-вейвлетом и сложностью порождаемого им алгоритма позволяет рассмотреть задачу построения материнских вейвлетов, обладающих предельно низкой сложностью вычисления локального ДВП. Приводятся несколько примеров таких «эффективных» сплайн-вейвлетов. Также дано выражение для сложности эффективного алгоритма, порождаемого известными биортогональными полиномиальными сплайн-вейвлетами [3,6,11].

В заключение работы приводятся ее основные результаты, благодарности фондам, поддерживающим данную научную работу, а также список литературы.

1. Основные сведения из теории вейвлетов

В общем случае под *вейвлетом* понимают функцию $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$, для которой справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (1)$$

Ограничение (1) не является единственным. В зависимости от вида вейвлет-преобразования оно дополняется рядом других, обеспечивающих

обратимость преобразования. Различные типы вейвлет-преобразований, обратные к ним и условия обратимости приведены, например, в монографии [11].

Для определенности ниже принята следующая нотация для прямого и обратного непрерывного Фурье-преобразования функции $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$:

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (2)$$

1.1. Интегральное вейвлет-преобразование

Определение 1. [11] Если $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ удовлетворяет условию допустимости в виде

$$C_{\psi} = \int_0^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty, \quad (3)$$

то $\psi(t)$ называется *базисным (материнским) вейвлетом*. Относительно каждого базисного вейвлета $\psi(t)$ интегральное вейвлет-преобразование (ИВП) функции $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ определяется формулой:

$$(Wf)(a,b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad a(>0), b \in \mathbf{R}. \quad (4)$$

Условие восстановления исходной функции из (4) определяет следующая

Теорема 1. (Кальдерон, Гроссман, Морле) [6]

Пусть $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ - вещественная функция такая, что выполняется (3). Тогда любая $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ удовлетворяет равенству:

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (Wf)(a,b) \left(|a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right) db \frac{da}{a^2}. \quad (5)$$

■

В [6] указано достаточное условие для выполнения условия допустимости (3):

$$- \widehat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad \text{и} \quad (6)$$

- $\widehat{\psi}(\omega)$ непрерывно дифференцируема, то есть производная существует и непрерывна.

Последнее условие выполняется, если $\psi(t)$ достаточно быстро убывает во времени [6]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|(1+|t|) dt < +\infty, \quad (7)$$

что является следствием следующего утверждения.

Предложение 1. [6] Функция $\widehat{f}(\omega)$ ограничена, k раз непрерывно дифференцируема и имеет ограниченные производные, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|(1+|t|^k) dt < +\infty. \quad \blacksquare \quad (8)$$

1.2. Дискретное вейвлет-преобразование

Дискретизация ИВП

При численном расчете ИВП его значения берутся на дискретном множестве точек:

$$(Wf)\left(\frac{1}{a_0^j}, \frac{kb_0}{a_0^j}\right) \equiv \langle f, \overline{\psi_{b_0;j,k}} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\psi_{b_0;j,k}(t)} dt \quad (9)$$

где

$$\psi_{b_0;j,k}(t) = \frac{1}{a_0^{j/2}} \psi\left(\frac{t-kb_0}{a_0^j}\right), \quad j,k \in \mathbf{Z}, \quad (10)$$

а параметры $a_0, b_0 \in \mathbf{R}_+$ выбирают из множества [6]:

$$a_0 = 2^{1/v}, \quad v = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

$$b_0 = \dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4}, \dots$$

Дискретный аналог выражения (9), в котором исходный сигнал является дискретным, называют *дискретным вейвлет преобразованием (ДВП)* [6].

Быстрый алгоритм ДВП на основе БПФ

Вычислительно эффективный способ расчета ДВП в общем случае заключается в использовании для каждой пары (j, k) алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) [6,9]. В частности, если $\text{supp}\psi(t) = [-K/2, K/2]$, а обрабатываемый цифровой сигнал имеет N отсчетов, тогда:

- имеем $v \log_2(N/(2K))$ масштабов,
- для каждого масштаба вычисление дискретного аналога «свертки» (9), использующей БПФ, требует $O(N \log_2 N)$.

Поэтому общее число операций на вычисление дискретного аналога непрерывного вейвлет-преобразования равно:

$$O(Nv(\log_2 N)^2). \quad (12)$$

Описанный алгоритм может быть использован для произвольных вейвлетов, в том числе и для всех рассматриваемых ниже. Однако, при некоторых дополнительных ограничениях на вид вейвлета и параметры $a_0, b_0 \in \mathbf{R}_+$ существуют быстрые алгоритмы, сложность которых существенно ниже величины (12). Одним из наиболее известных алгоритмов является алгоритм быстрого ДВП С.Малла [6], который используется для вычисления ДВП для ортогональных и биортогональных вейвлетов.

Суть алгоритма быстрого ДВП состоит в использовании двух конечных наборов фильтров $\{h(n)\}, \{g(n)\}$ [6]. Обозначая $\{f_0(n)\}$ - входную последовательность значений цифрового сигнала, коэффициенты $\{d_{j+1}(n)\}$ ДВП для вейвлетов уровня

$j+1$ могут быть получены путем вычисления последовательных сверток сигнала $\{f_j(n)\}$ текущего уровня/разрешением j и отсчетов фильтров $\{h(n)\}, \{g(n)\}$ с последующим прореживанием полученного сигнала. А именно [6]:

$$f_{j+1}[n] = (f_j * h)[2n], \quad d_{j+1}[n] = (f_j * g)[2n],$$

здесь обозначение « $[2n]$ » означает прореживание полученного сигнала, то есть выборку каждого второго отсчета. Таким образом, для входного сигнала длины N сложность алгоритма быстрого ДВП составляет $O(N)$, то есть не зависит от ширины носителя вейвлета [6].

Наряду с очевидными преимуществами, быстрый алгоритм ДВП имеет несколько недостатков:

- алгоритм может быть использован только для ортогональных и биортогональных вейвлетов,
- список масштабов для вейвлетов ограничивается только степенями целых чисел (в каждом конкретном случае – это степени числа «2» или степени числа «3» и т.д.),
- расчет коэффициентов разложения производится «неравномерно»: для вейвлетов более высокого уровня (с большим носителем) число коэффициентов разложения меньше. Данный недостаток, несущественный в задачах сжатия или кодирования сигнала, оказывается важным в других задачах:
 - при визуализации (скейлограммы) ДВП [6],
 - при анализе скейлограмм,
 - при локальном анализе/распознавании сигналов, когда вычисление ДВП производится локально, то есть в режиме «скользящего окна».

Заметим, что во многих приложениях (физика, медицина и др.) часто используются неортогональные (и не биортогональные) вейвлеты, которые не имеют быстрого алгоритма вычисления. Наиболее известным примером такого вейвлета является вейвлет «мексиканская шляпа», который представляет собой вторую производную функции Гаусса [3,6,10,11]. Очевидно, что для таких вейвлетов, а также для дробных масштабов процесс вычисления ДВП приходится производить с использования алгоритма БПФ. Такая реализация ДВП, с учетом выражения (12), является вычислительно очень трудоемкой вследствие больших размеров обрабатываемых сигналов и самих носителей вейвлетов.

Цель настоящей работы – показать, что существует подкласс базисных вейвлетов, которые не обязательно удовлетворяют условию ортогональности или биортогональности, и для которых существуют вычислительно эффективные алгоритмы расчета локального ДВП, свободные от указанных недостатков.

Ниже не просто показано, что такие вейвлеты существуют, но также приводятся несколько примеров

таких вейвлетов как новых, так и известных. Указывается сложность соответствующих алгоритмов вычисления локального ДВП.

Для построения таких специфических вейвлетов и алгоритмов быстрого вычисления локального ДВП используется подход, предложенный автором в работах [7,8]. Подход кратко изложен во втором разделе. А представление вейвлетов и эффективных алгоритмов ДВП, построенных с использованием этого подхода, производится в третьем разделе.

2. Эффективный алгоритм вычисления свертки, порождаемый сплайн-представлением КИХ

Настоящий раздел содержит тезисное изложение одного частного решения задачи построения эффективного алгоритма, рассмотренной ранее в работах автора [7,8]. А именно, здесь приводится (эффективный) алгоритм вычисления линейной свертки цифрового сигнала с конечной импульсной характеристикой (КИХ), который порождается сплайн-представлением этой КИХ. Приведено выражение для сложности такого алгоритма как функции параметров сплайна. Более подробное изложение этих результатов с доказательствами дано в работах автора [7,8].

Под обобщенным (дискретным) сплайном порядка K , определенным на разбиении/сетке Δ_S отрезка $[a, b]$, далее понимается функция $S_K(\Delta_S; n)$ ($K \geq 0$), которая на частных отрезках $[t_s, t_{s+1})$ сетки $\Delta_S: a = t_0 < t_1 < \dots < t_S = b$, совпадает с функциями $p_s(t)$, которые являются решениями единого линейного рекуррентного соотношения (ЛРС) порядка $(K + 1)$:

$$p_s(n) = \sum_{k=1}^{K+1} a_k p_s(n-k), \quad s = \overline{0, S-1}.$$

Выбирая $a_k = (-1)^{k-1} C_{K+1}^k$, $k = \overline{1, K+1}$, получаем полиномиальный сплайн, где $p_s(t)$ - многочлены степени не выше K .

Определим далее величины:

$$\begin{aligned} &\Delta_{M,S+1}^Z: \\ &\forall s = \overline{1, S-1} \quad t_s \in \mathbf{Z} \wedge t_s - t_{s-1} \geq K+1 \\ &\wedge t_0 = 0 \wedge t_S = M-1 \wedge t_{S+1} = M; \end{aligned}$$

$$\Theta = \left\{ m \in \overline{0, M+K+1}; \right. \\ \left. S_K(\Delta_{M,S+1}^Z; m) \neq \sum_{k=1}^{K+1} a_k S_K(\Delta_{M,S+1}^Z; m-k) \right\};$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(m) &= \left(S_K(\Delta_{M,S+1}^Z; m) - \sum_{k=1}^{K+1} a_k S_K(\Delta_{M,S+1}^Z; m-k) \right), \\ m &\in \Theta; r_{\Sigma} = |\Theta|. \end{aligned}$$

Величина r_{Σ} далее называется суммарным дискретным дефектом сплайна.

В работе [7] показано, что если КИХ представима в виде обобщенного дискретного сплайна, удовлетворяющего некоторым ограничениям, то алгоритм вычисления свертки с такой КИХ может быть представлен следующим образом.

Алгоритм A^{CR} для обобщенного сплайна

Шаг 1. Предварительная обработка:

$$\tilde{y}(n) = \sum_{m \in \Theta} x(n-m) \tilde{\varphi}(m), \quad n = \overline{0, N-1}.$$

Шаг 2. Постобработка:

$$y(n) = \sum_{k=1}^{K+1} a_k y(n-t) + \tilde{y}(n), \quad n = \overline{0, M-1},$$

с иницирующими значениями $y(t) \equiv 0$. \square

Формально, этот алгоритм оказывается рекурсивным и реализует вычисления по единой формуле:

$$y(n) = \sum_{k=1}^{K+1} a_k y(n-t) + \sum_{m \in \Theta} x(n-m) \tilde{\varphi}(m), \quad n = \overline{0, M-1}.$$

Алгоритм A^{CR} для полиномиального сплайна

Шаг 1. Предварительная обработка:

$$\tilde{y}(n) = \sum_{m \in \Theta} x(n-m) \tilde{\varphi}(m), \quad n = \overline{0, N-1}.$$

Шаг 2. Постобработка:

$$\begin{aligned} y_{(K_h-1)}^x(n) &\equiv \tilde{y}(n), \quad n = \overline{0, N-1}, \\ y_k^h(n) &= y_k^h(n-1) + y_{k+1}^h(n), \\ &n = \overline{0, N-1}, \quad k = \overline{K_h-2, 0} \quad (K_h > 1), \\ y(n) &\equiv y_0^h(n), \quad n = \overline{0, N-1}. \end{aligned}$$

\square

Для представленных алгоритмов справедливо

Предложение 2. [7] Вычислительная сложность алгоритма A^{CR} , порождаемого сплайн-представлением $\mathfrak{S}_K(\Delta_{M,S+1}^Z; t)$ КИХ, имеет вид

$$\begin{aligned} (\xi_{add} + \xi_{mul} = 1; \quad \xi_{add}, \xi_{mul} \in \mathbf{R}) \\ - \text{ для обобщенного сплайна:} \\ u(A^{CR}) \frac{N-M+1}{N} = K+1 + r_\Sigma - \xi_{add}, \end{aligned} \quad (13)$$

- для полиномиального сплайна:

$$u(A^{CR}) \frac{N-M+1}{N} = r_\Sigma + K \xi_{add}. \quad (14)$$

■
Существенным моментом является то, что вычислительная сложность алгоритма A^{CR} , порождаемого сплайн-представлением $\mathfrak{S}_K(\Delta_{M,S+1}^Z; t)$ КИХ,

оказывается ограничена сверху. Это следует из того, что величина суммарного дискретного дефекта сплайна ограничена сверху величиной [7]:

$$r_\Sigma \leq (S+1)(K+1)+1. \quad (15)$$

Таким образом, основным результатом настоящего раздела и работ [7,8] является связь между дискретным обобщенным сплайном, порождаемым им алгоритмом A^{CR} вычисления свертки и сложностью этого алгоритма.

3. Сплайн-вейвлеты с конечными носителями и эффективный алгоритм локального ДВП

Для удобства дадим краткое изложение представленных ниже результатов. Сначала устанавливается, что ограниченная вещественная функция с конечным носителем и нулевым средним удовлетворяет условию допустимости (3), то есть является базисным вейвлетом. Далее доказывается, что масштабирование (по аргументу) вещественной функции, последовательность значений которой удовлетворяет однородному ЛРС порядка K , также приводит к функции, последовательность значений которой удовлетворяет однородному ЛРС порядка не выше K . Это позволяет рассматривать множество сплайн-функций, удовлетворяющих однородному или неоднородному ЛРС, с конечным носителем и нулевым средним, как замкнутое относительно операции масштабирования. С учетом того, что функции этого множества, содержащие различные масштабы материнских вейвлетов, являются сплайнами, при определенных условиях (малом числе узлов и малом порядке) для каждой такой функции существует эффективный алгоритм A^{CR} , порождаемый сплайн-вейвлетом. Именно этот алгоритм может быть использован для построения вычислительно эффективного ДВП. В завершении приводятся примеры сплайн-вейвлетов, для которых существуют эффективные алгоритмы ДВП.

3.1. Сплайн-вейвлеты с конечным носителем

Предложение 3. Пусть вещественнозначная функция $\psi(t)$ удовлетворяет условиям:

$$|\psi(t)| < \infty, \quad \text{supp}(\psi(t)) < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (16)$$

Тогда $\psi(t)$ - базисный вейвлет.

Доказательство: Как было указано выше, достаточным условием для выполнения условия допустимости (3) является пара условий (6) и (7). Условие (6) выполняется в силу (16). Условие (7) для ограниченных функций с конечным носителем также выполняется. Следовательно, $\hat{\psi}(\omega)$ непрерывно дифференцируема, $\psi(t)$ удовлетворяет условию допустимости (3) и является базисным вейвлетом. ■

Известно, что если последовательность $\psi(n)$ удовлетворяет однородному ЛРС порядка K , то решением ЛРС является функция вида [1,2]:

$$\psi(t) = \sum_{l=0}^{L-1} (\omega_l)^t \sum_{r=0}^{R_l-1} t^r \beta_{lr}, \quad (17)$$

где $\omega_l, \beta_{lr} \in \mathbf{C}$. Набор корней $\{\omega_l\}_{l=0}^{L-1}$, их количество L и кратности $\{R_l\}_{l=0}^{L-1}$ корней определяют «тип» ЛРС. А значения $\{\beta_{lr}\}$ определяют начальные условия ЛРС.

Тогда справедливо

Предложение 4. Пусть функция $\psi(t)$ допускает представление в виде (17) с некоторыми коэффициентами ω_l, β_{lr} и $K_{\psi(t)} = \sum_{l=0}^{L-1} R_l$. Тогда

$\psi(\alpha t)$ ($\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$) также допускают представление в виде (17) с другими значениями коэффициентов ω_l, β_{lr} и $K_{\psi(\alpha t)} \leq K_{\psi(t)}$.

Доказательство: производится непосредственной проверкой. Понижение значения величины K (порядка соответствующего ЛРС) происходит при выполнении условия: $\exists l_1, l_2 : (\omega_{l_1})^\alpha = (\omega_{l_2})^\alpha$. ■

Это предложение означает, что масштабирование (по аргументу) функции, последовательность значений которой удовлетворяет однородному ЛРС порядка K , также приводит к функции, последовательность значений которой удовлетворяет однородному ЛРС порядка не выше K . Этот вывод, очевидно, остается верным и в случае, когда первоначальная функция является обобщенным сплайном.

Из предложений 3 и 4 имеем

Следствие 1. Пусть вещественная функция $\psi(t)$ удовлетворяет условиям (16) и допускает представление в виде обобщенного сплайна порядка K с заданными на частичных интервалах функциями вида (17), различающимися коэффициентами $\{\beta_{lr}\}$, и $K = \sum_{l=0}^{L-1} R_l$. Тогда $\psi(\alpha t)$ ($\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$) - базисный вейвлет. ■

Последнее утверждение позволяет выделить среди всего множества базисных вейвлетов подмножество, элементы которого попадают под

Определение 2. Вещественнозначная функция $\psi(t)$ называется (базисным) сплайн-вейвлетом, если она удовлетворяет условиям (16) и допускает представление в виде обобщенного сплайна порядка K с $(S-1)$ -м интервалом, а функции

$p_s(t)$, определяющие поведение сплайна на частичных интервалах разбиения его области определения, имеют вид:

$$p_s(t) = \sum_{l=0}^{L_s-1} (\omega_l^s)^t \sum_{r=0}^{R_l^s-1} t^r \beta_{rl}^s, \quad (18)$$

где

$$\forall s = \overline{0, S-1} \quad L_s = L, \quad \omega_l^s = \omega_l, \quad R_l^s \leq R_l, \quad K = \sum_{l=0}^{L-1} R_l. \quad (19)$$

□

Дополнительные ограничения (19) данного определения указывают на то, что последовательности значений всех функций $\{p_s(t)\}_{s=0}^{S-1}$ удовлетворяют одному и тому же однородному ЛРС. Без этого ограничения получаемая функция, в силу следствия 1 также будет являться вейвлетом, однако она не будет (обобщенным) сплайном.

Способ получения сплайн-вейвлетов тривиален. Его фиксирует следующее

Предложение 5. (достаточное условие того, что обобщенный сплайн является базисным вейвлетом) Пусть $\psi(t)$ - обобщенный сплайн с конечной областью определения. Если для $\psi(t)$ выполняется условие (1), тогда $\psi(t)$ - базисный сплайн-вейвлет. ■

Ниже в таблице 1, представлены некоторые полиномиальные сплайн-вейвлеты. Очевидно, привести другие примеры как для полиномиальных, так и для обобщенных сплайн-вейвлетов не представляет сложности, поскольку, следуя условиям последнего предложения, от сплайна достаточно добиться выполнения единственного условия (1). Поскольку других условий на обобщенный сплайн не накладывается, то все множество степеней свободы сплайна с заданным порядком K и числом узлов S можно использовать для удовлетворения дополнительных (внешних) ограничений. Типичными для вейвлетов являются ограничения на число нулевых моментов и гладкость (регулярность) вейвлета [3,6,11]. Напомним, что для ортогональных вейвлетов число нулевых моментов и гладкость являются жестко взаимозависимыми [3,6,11]. Для введенных сплайн-вейвлетов, очевидно, эта зависимость существенно слабее, поскольку нет изначальных ограничений ортогональности.

Комментарий к понятию «сплайн-вейвлет»

В теории вейвлетов давно используется понятие «сплайн-вейвлет» [3,6,11]. Наиболее известными являются сплайн-вейвлеты Баттла-Ламарье [3,6,11]. Эти вейвлеты являются ортогональными, но сплай-

нами они, в действительности, не являются. Название «сплайн-вейвлеты» они получили потому, что процесс их построения связан с цепочками кратномасштабного анализа, состоящими из пространств функций-сплайнов: в качестве масштабирующей функции берутся B -сплайны [3,4,6,11] с узлами в целых числах. Для масштабирующей функции в виде B -сплайна нулевой степени получается сплайн-вейвлет в виде функции Хаара [3,4-6,11]. Для масштабирующих функций в виде B -сплайнов больших степеней в результате «ортонормализации» [3] вейвлеты перестают быть сплайнами, а их носители становятся бесконечными [3,6,11].

В отличие от ортогональных, биортогональные (полуортогональные) сплайн-вейвлеты с наименьшим компактным носителем действительно являются сплайнами и действительно имеют компактные носители [6,11]. Построение этих сплайн-вейвлетов также начинается с масштабирующей функции в виде B -сплайна некоторой степени K , при этом результат - сплайн-вейвлет – оказывается сплайном той же степени K и имеет компактный носитель. Поэтому при вычислении скейлограмм для биортогональных сплайн-вейвлетов, наряду с известным быстрым алгоритмом (далее – БА) ДВП С.Малла, может быть использован и предложенный эффективный алгоритм.

В настоящей работе понятие «сплайн-вейвлет» задается определением 2. Заметим, что в качестве сплайна, в отличие от работ [6,11], не обязательно выступает полиномиальный сплайн.

3.2. Эффективный алгоритм вычисления локального ДВП, порождаемый сплайн-вейвлетом с конечным носителем

Естественным вопросом является вопрос о наличии для введенных сплайн-вейвлетов вычислительно эффективных алгоритмов ДВП. Учитывая, что сплайн-вейвлет является (обобщенным) сплайном и, следовательно, для него выполняются выводы второго раздела, имеем

Предложение 6. Пусть $\psi(t)$ - сплайн-вейвлет порядка K с $(S+1)$ -м узлом, J – множество отличных от нуля масштабов, порождающих множество $\{\psi(\alpha t)\}_{\alpha \in J}$ масштабированных функций исходного сплайн-вейвлета. Тогда для любой функции $\psi(\alpha t)$ сплайн-вейвлета из множества $\{\psi(\alpha t)\}_{\alpha \in J}$ существует алгоритм A_{CR}^α , порождаемый сплайн-представлением $\psi(\alpha t)$, со сложностью $u(A_{CR}^\alpha)$, удовлетворяющей ограничениям ($M = \text{supp}(\psi(\alpha t))$, N – длина обрабатываемого входного сигнала)

- для обобщенного сплайна:

$$u(A_{CR}^\alpha) \leq \frac{N}{N-M+1} \left((S+2)(K+1) + 1 - \xi_{add} \right), \quad (20)$$

- для полиномиального сплайна:

$$u(A_{CR}^\alpha) \leq \frac{N}{N-M+1} \left((S+1)(K+1) + 1 + K\xi_{add} \right). \quad (20')$$

Доказательство: следствие (13)-(15). ■

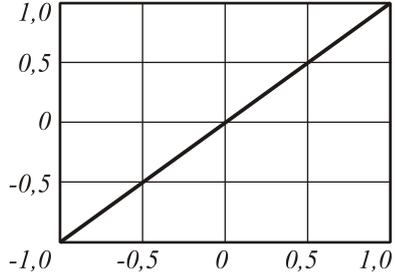
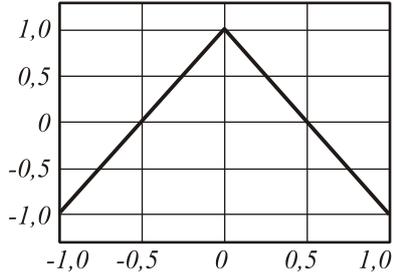
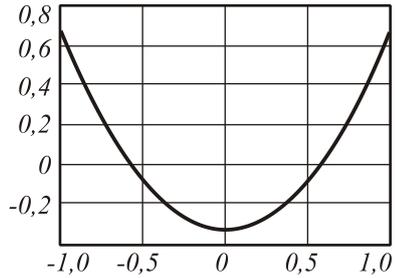
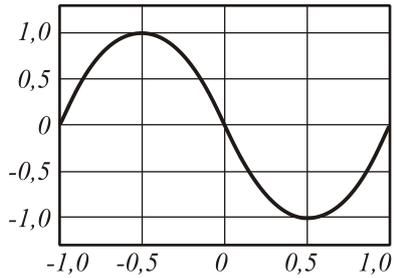
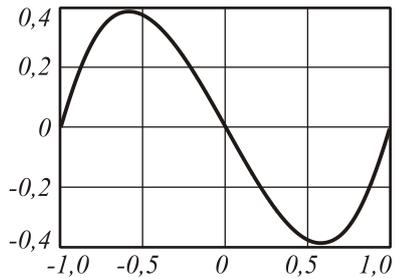
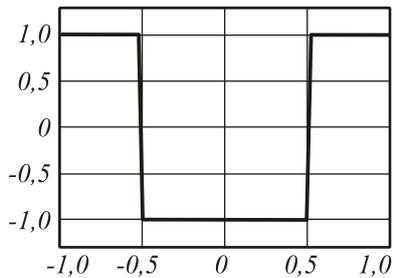
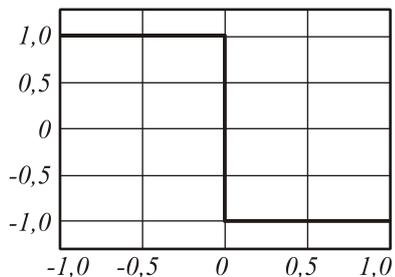
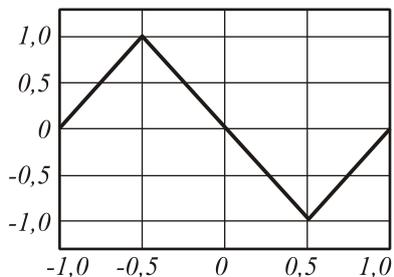
Естественно, алгоритм вычисления локального ДВП, порождаемый сплайн-вейвлетом, тем вычислительно эффективнее, чем ниже значения K и S . Поэтому, в дополнении к традиционным для вейвлетов условиям, связанным с гладкостью и числом нулевых моментов, на конструируемые сплайн-вейвлеты можно наложить дополнительные требования. В частности, требование минимума сложности эффективного алгоритма вычисления локального ДВП для сплайна заданного порядка.

3.3. Примеры сплайн-вейвлетов с эффективными алгоритмами вычисления локального ДВП

Несколько примеров полиномиальных сплайн-вейвлетов с низкой вычислительной сложностью (до 10 операций на один отсчет рассчитываемой скейлограммы при $\xi_{add} = \xi_{mul} = 0,5$) порождаемых ими алгоритмов вычисления локального ДВП приведены в табл. 1. Отметим, что в расчетах не учитывалось свойство симметрии или антисимметрии сплайн-вейвлета. Если это свойство учитывать (при аналитическом построении эффективного алгоритма), то приводимая вычислительная сложность алгоритма A_{CR}^α , порождаемого сплайн-вейвлетом, будет ниже указанной в таблице примерно на $\xi_{mul} K / 2$.

Из табл. 1 видно, что наименьшей вычислительной сложностью обладает алгоритм A_{CR}^α , порождаемый сплайн-вейвлетом порядка $K=0$ с $S=2$ интервалами. Этот сплайн-вейвлет является широко известным вейвлетом – функцией Хаара [3,5,6,11]. Вейвлеты на основе базиса Хаара являются ортонормированными вейвлетами. Как следствие, для вычисления их ДВП можно использовать упомянутый в начале работы быстрый алгоритм ДВП С.Малла [6]. Заметим, что для базиса Хаара БА ДВП имеет наименьшую сложность среди всех БА ДВП и всех ортогональных вейвлетов. Сравнение БА ДВП для базиса Хаара с предложенным эффективным алгоритмом, порождаемым сплайн-представлением $\psi(t)$, приведено в работе [5]. Как показало сравнение, эффективный алгоритм является вполне конкурентоспособным [5]: при определенных диапазонах требуемых (полезных) масштабов α ДВП порождаемый алгоритм A_{CR}^α имеет меньшую вычислительную сложность, чем известный БА С.Малла.

Табл. 1 - Сплайн-вейвлеты, порождающие эффективные алгоритмы ДВП

S	K	$u(A_{CR}^{\alpha})$	базисный вейвлет	S	K	$u(A_{CR}^{\alpha})$	базисный вейвлет
1	1	4,5		2	1	6,5	
1	2	7		2	2	10	
1	3	9,5		3	0	4	
2	0	3		3	1	8,5	

3.4. Основные свойства сплайн-вейвлетов и порождаемых ими эффективных алгоритмов ДВП

Основные свойства введенных сплайн-вейвлетов и порождаемых ими эффективных алгоритмов вычисления локального ДВП суммированы в следующих положениях:

- для сплайн-вейвлетов с конечными носителями существуют (вычислительно) эффективные алгоритмы локального ДВП;
- сложность эффективного алгоритма вычисления локального ДВП для сплайн-вейвлета с конечным носителем не зависит от его масштаба;
- сплайн-вейвлеты обладают большим числом степеней свободы. Это число степеней свободы можно использовать для удовлетворения дополнительных (внешних) требований к сплайн-вейвлетам;
- при удовлетворении всех внешних требований можно построить сплайн-вейвлеты, которые порождают (для разных масштабов) алгоритмы с предельно низкой вычислительной сложностью (по отношению к сложности алгоритмов, порождаемых сплайн-вейвлетами того же порядка);
- эффективные алгоритмы вычисления локального ДВП, порождаемые сплайн-вейвлетами,

позволяют организовать расчет скейлограмм для масштабов, которые не обязательно соответствуют степеням целого числа. Это позволяет, при необходимости, дополнительно снизить сложность процесса вычисления скейлограмм.

3.5. Биортогональные полиномиальные сплайн-вейвлеты с конечным носителем

В завершении настоящего раздела приведем характеристики эффективного алгоритма вычисления локального ДВП, порождаемого широко известными биортогональными полиномиальными сплайн-вейвлетами с конечным носителем [3,6,11]. Как хорошо известно, для построения биортогонального полиномиального сплайн-вейвлета порядка k в качестве масштабирующей функции $\varphi(t)$ следует использовать B -сплайн порядка k , определяемый выражением [4,11]:

$$B_0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1], \\ 0, & t \notin [0,1]; \end{cases}$$

$$B_k(t) = \int_0^1 B_{k-1}(t-\tau) d\tau, \quad k \geq 1.$$

Размер носителя B -сплайна порядка k , очевидно, равен $k+1$. Изображения B -сплайнов порядков 0, 1 и 2 приведены на рисунках 1-3.

Далее, масштабирующие функции $\varphi(t)$, то есть B -сплайны, образуют базис пространства с текущим разрешением. Поэтому любой вейвлет $\psi(t/2)$ меньшего разрешения представим в виде линейной декомпозиции функций $\{\varphi(t-n)\}$. Для вейвлета $\psi(t)$ текущего разрешения это представления имеет вид [3,6,10,11]:

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_n (-1)^{n-1} \overline{h_{-n-1}} \varphi(2t-n), \quad (21)$$

где

$$h_n = \int \varphi(t) \varphi(2t-n) dt. \quad (22)$$

Легко проверить, что при использовании в качестве масштабирующей функции $\varphi(t)$ B -сплайна порядка k число ненулевых коэффициентов $\{h_n\}$ (22) в выражении (21) составит $(3K+2)$. Следовательно, биортогональный сплайн-вейвлет $\psi(t)$ является полиномиальным сплайном степени k с числом узлов $(4K+3)$, определенным на носителе длиной $(2K+1)$. Вид биортогональных полиномиальных сплайн-вейвлетов $\psi(t)$ степеней 0,1 и 2 приведен на рис. 1-3. Учитывая свойство гладкости для этих вейвлетов (исключая случай $k=0$), легко получить

выражение для максимального значения суммарного дискретного дефекта такого сплайна. А именно, учитывая число узлов и степень сплайна, имеем:

$$r_\Sigma = \begin{cases} 3, & k = 0, \\ k(4k+3), & k > 0. \end{cases}$$

Подставляя этот результат в выражение (14) для сложности алгоритма A^{CR} вычисления локального ДВП, порождаемого (полиномиальным) сплайн-представлением КИХ, имеем:

$$u(A^{CR}) \frac{N-M+1}{N} = \begin{cases} 3, & k = 0, \\ k(4k+3) + k\xi_{add}, & k > 0. \end{cases} \quad (23)$$

Для сплайн-вейвлетов до третьей степени сложность, очевидно, составит:

$$u(A^{CR}) \frac{N-M+1}{N} = \begin{cases} 3, & k = 0, \\ 7 + \xi_{add}, & k = 1, \\ 22 + 2\xi_{add}, & k = 2, \\ 45 + 3\xi_{add}, & k = 3 \end{cases} \quad (24)$$

операций на один отсчет вычисляемой скейлограммы. Существенно, что сложность эффективного алгоритма вычисления локального ДВП не зависит от масштаба вейвлета.

Выражения (23)-(24) можно улучшить «вручную», если учитывать равные по модулю множители, которые появляются в отсчетах неоднородности сплайн-вейвлета. Однако, такой детальный анализ эффективного алгоритма не является целью настоящей работы.

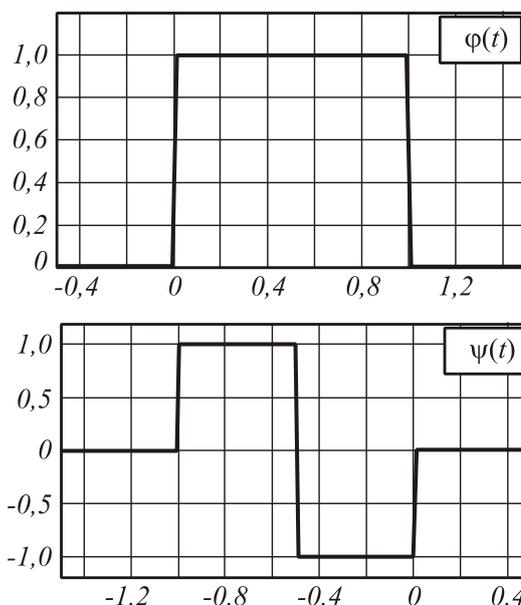


Рис.1. Масштабирующая функция в виде B -сплайна нулевой степени и соответствующий ей (би)ортогональный сплайн-вейвлет

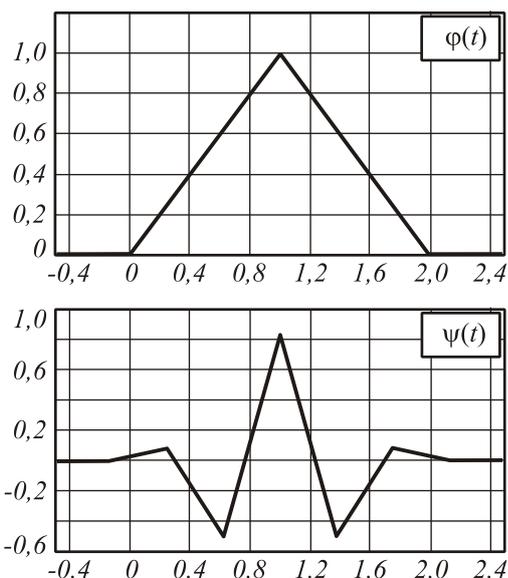


Рис.2. Масштабирующая функция в виде В-сплайна первой степени и соответствующий ей биортогональный сплайн-вейвлет

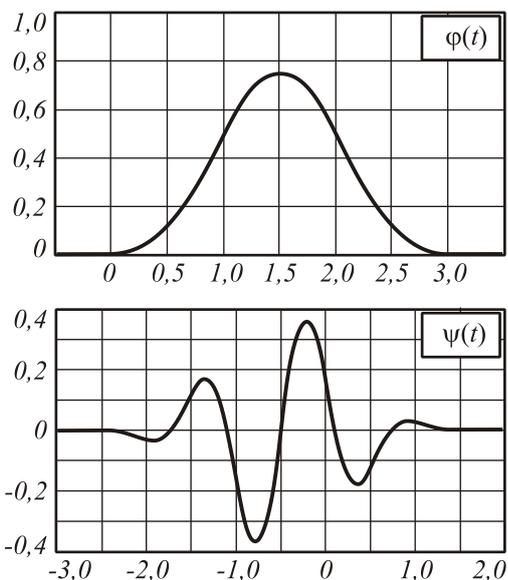


Рис.3. Масштабирующая функция в виде В-сплайна второй степени и соответствующий ей биортогональный сплайн-вейвлет

Заключение

В работе предложен подкласс базисных вейвлетов, для которых существует эффективный (рекурсивный) алгоритм вычисления локального ДВП. Показано, что в данный подкласс входят вейвлеты в виде обобщенных дискретных сплайнов. Приводится эффективный алгоритм вычисления локального ДВП, порождаемый соответствующим сплайн-вейвлетом, дано выражение для вычислительной сложности этого алгоритма.

Указаны преимущества предложенного эффективного алгоритма ДВП по сравнению с известным быстрым алгоритмом ДВП С.Малла. В частности, предложенный алгоритм для введенного подкласса вейвлетов не требует ортогональности или биортогональности вейвлетов и позволяет вычислять ДВП для произвольных (нецелых) масштабов. Приведены примеры некоторых сплайн-вейвлетов, порождающих эффективный алгоритм (локального) ДВП с малой сложностью (до 10 операций на отсчет). Приведено общее выражение для сложности эффективного алгоритма, порождаемого известными биортогональными полиномиальными сплайн-вейвлетами.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке:

- Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проект № 06-01-00616-а;
- Фонда содействия отечественной науке.

Литература

- 1 **Андерсон, Дж.А.** Дискретная математика и комбинаторика / Дж.А. Андерсон - М.: ИД «Вильямс», 2004.
- 2 **Гельфонд, А.О.** Исчисление конечных разностей / А.О. Гельфонд - М.: Наука, 1967.
- 3 **Добеши, И.** Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши - Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
- 4 **Завьялов, Ю.С.** Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко - М.: Наука, 1980.
- 5 **Копенков, В.Н.** Быстрые алгоритмы локального дискретного вейвлет-преобразования с базисом Хаара / В.Н. Копенков, В.В. Мясников // Труды научнотехнической конференции с международным участием «Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении «ПИТ-2006»», Самара, 2006. - С. 113-118.
- 6 **Малла, С.** Вейвлеты в обработке сигналов / С. Малла - М.: Мир, 2005.
- 7 **Мясников, В.В.** Сплайны как средство построения эффективных алгоритмов локального линейного преобразования / В.В. Мясников // Компьютерная оптика, 2007. - Т. 31. - № 2. - С. 52-68.
- 8 **Мясников, В.В.** Эффективный алгоритм над множеством алгоритмов вычисления свертки / В.В. Мясников // Компьютерная оптика, 2006. - В. 29. - С. 78-117.
- 9 **Нуссбаумер, Г.** Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления свёрток // Г. Нуссбаумер - М.: Радио и связь, 1985.
- 10 **Петухов, А.П.** Введение в теорию базисов всплесков. Учебное пособие // А.П. Петухов - СПб: Изд-во СПбГТУ, 1999.
- 11 **Чуи, К.** Введение в вейвлеты // К. Чуи - М.: Мир, 2001.
- 12 **Holschneider, M.** A real-time algorithm for signal analysis with help of the wavelet transform / M. Holschneider [and others] // Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space, Chapter A. - Berlin: Springer-Verlag, 1989. P. 289-297.

EFFICIENT ALGORITHMS FOR LOCAL DISCRETE WAVELET TRANSFORM

V.V. Myasnikov^{1,2}

¹Image Processing Systems Institute of the RAS, Samara, Russia,

²Samara State Aerospace University (SSAU), Samara, Russia

Abstract

The main objective of this paper is to develop a new class of computationally efficient algorithms for local wavelet transforms. It is expected that a hierarchical (pyramidal-recursive) hardware inherent with the known algorithm “with holes” (“algorithme a trous,” M. Holschneider et al, 1989) [12] and the algorithm for fast orthogonal wavelet transform (Mallat algorithm, 1987) [3,6,11] is to be replaced with a horizontal-recursive hardware, where wavelet transform coefficients are calculated for all proper-scaled wavelet positions in series, i.e. using a sliding window mode. Replacement of the hierarchical hardware with the horizontal-recursive one allows us to handle a problem of base wavelets that meet the requirements of a recursive solution. This problem generally includes a number of sub-tasks associated with the analysis of main wavelet classes: base (mother), two-parameter, frameworks (frames), R-wavelets, semi-orthogonal, and orthogonal wavelets. This paper is devoted to efficient algorithms developed for the simplest class of base (mother) wavelets, as well as to wavelet conditions/restrictions for which these algorithms exist. Several examples are given for new and well-known wavelets with efficient (recursive) algorithms for calculation of local discrete wavelet transform.

Keywords: local wavelet transform, discrete wavelet, recursive solution, analysis of main wavelet classes

Citation: Myasnikov VV. Efficient algorithms for local discrete wavelet transform [In Russian]. Computer Optics 2007; 31(4): 86-94.

Acknowledgement: The work was supported by:

- the Russian Foundation for Basic Research (RFBR), project No. 06-01-00616-a; and
- the Russian Science Support Foundation.

References:

- [1] Anderson JA. Discrete mathematics with combinatorics [In Russian]. Moscow: “Williams” Publishing House, 2004.
- [2] Gelfond AO, ed. Calculus of finite differences [In Russian]. Moscow: “Nauka” Publisher, 1967.
- [3] Dobeshi I. Ten lectures on wavelet [In Russian]. Moscow - Izhevsk: “Regular and Chaotic Dynamics” Scientific and Publishing Center, 2001.
- [4] Zavyalov YuS, Kvasov BI, Miroshnichenko VL. Methods of spline-functions [In Russian]. Moscow: “Nauka” Publisher, 1980.
- [5] Kopenkov VN, Myasnikov VV. Fast algorithms for local discrete wavelet transform with Haar basis [In Russian]. Samara International Scientific and Technical Conference, PIT 2006; 2: 113-118.
- [6] Mallat S. A wavelet tour of signal processing [In Russian]. Moscow: “Mir” Publisher, 2005.
- [7] Myasnikov VV. Splines as a means of construction of efficient algorithms of linear local transformation [In Russian]. Computer Optics 2007; 31(2): 52-68.
- [8] Myasnikov VV. Efficient algorithm over the set of the convolution algorithms [In Russian]. Computer Optics 2006; 29: 78-117.
- [9] Nussbaumer H. Fast Fourier transform and convolution algorithms [In Russian]. Moscow: “Radio i svyaz” Publisher, 1985.
- [10] Petukhov AP. Introduction to wavelet theory. Handbook [In Russian]. St. Petersburg Polytechnic University Publisher, 1999.
- [11] Chui CK. Introduction to wavelets [In Russian]. Moscow: “Mir” Publisher, 2001.
- [12] Holschneider M. A real-time algorithm for signal analysis with help of the wavelet transform. Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space, Chapter A. Berlin: Springer-Verlag, 1989; 289-297.