

РАСЧЕТ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА СФЕРИЧЕСКИЙ МИКРООБЪЕКТ В ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПУЧКАХ

Скиданов Р.В., Хонина С.Н., Морозов А.А., Котляр В.В.

Институт систем обработки изображения РАН,

Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П. Королева

Аннотация

Проведен численный расчет сил действующих на сферический микрообъект в новом семействе парааксиальных лазерных пучков. При распространении в однородном пространстве эти пучки сохраняют свою структуру с точностью до масштаба. Численно показано, что при сохранении азимутального номера моды и изменении радиального номера моды в несколько раз, сила, действующая на диэлектрический микрошар, диаметр которого меньше ширины яркого светового кольца моды, также изменится примерно в такое же число раз.

Введение

Уравнение Гельмгольца, которое описывает распространение непарааксиальной монохроматической световой волны в однородном пространстве, допускает решения с разделяющимися переменными в 11 различных системах координат [1]. Это означает, что существуют световые поля, распространяющиеся без изменения своей структуры. Примером являются хорошо известные моды Бесселя [2]. Парааксиальный аналог уравнения Гельмгольца – это параболическое уравнение типа Шредингера, которое описывает распространение парааксиальных световых полей. Это уравнение допускает решения с разделяющимися переменными в 17 системах координат [1]. Световые поля, которые описываются такими решениями, при распространении сохраняют свою структуру с точностью до масштаба. Примером являются хорошо известные моды Эрмита-Гаусса и Лагерра-Гаусса [3].

В работах [4,5] рассмотрено семейство лазерных мод, представляющих собой ортонормированный базис и являющихся решением с разделенными переменными парааксиального параболического уравнения в цилиндрической системе координат. В цилиндрической системе координат уравнение Шредингера кроме решений в виде мод Бесселя и мод Лагерра-Гаусса также имеет решения в виде вырожденных гипергеометрических функций. Распределение интенсивности в поперечном сечении таких пучков близко к распределению интенсивности для мод Бесселя. Как и моды Бесселя гипергеометрические моды имеют бесконечную энергию. С помощью дифракционных оптических элементов (ДОО) или жидкокристаллических микродисплеев [5], можно сформировать лазерные пучки, близкие к гипергеометрическим модам. В отличие же от мод Бесселя, радиусы световых колец гипергеометрических мод увеличиваются с ростом продольной координаты z как $z^{1/2}$. В отличие от мод Бесселя семейство гипергеометрических мод двухпараметрическое, что дает возможность регулировать поперечные размеры таких пучков, не меняя порядок фазовой сингулярности. Это свойство может быть полезно в задаче оптического вращения микрообъекта. В работе проведена оценка сил, вращающих сферический микрообъект в гипергеометрических пучках при разных параметрах ДОО. Численно показано,

что при сохранении азимутального номера моды и изменении радиального номера моды в несколько раз, сила, действующая на диэлектрический микрошар, диаметр которого меньше ширины яркого светового кольца моды, также изменится примерно в такое же число раз.

1. Теоретические основы

Комплексная амплитуда парааксиального светового поля $E(r, \varphi, z)$ в цилиндрической системе координат (r, φ, z) удовлетворяет уравнению типа Шредингера:

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) E(r, \varphi, z) = 0, \quad (1)$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ волновое число света с длиной волны λ . Уравнению (1) удовлетворяют функции, образующие ортонормированный базис:

$$E_{\gamma, n}(r, \varphi, z) = \frac{1}{2\pi n!} \left(\frac{z_0}{z} \right)^{\frac{1}{2}} \Gamma \left(\frac{n+1+i\gamma}{2} \right) \times \exp \left[\frac{i\pi}{4} (-n+i\gamma-1) + \frac{i\gamma}{2} \ln \frac{z_0}{z} + in\varphi \right] \times x^{\frac{n}{2}} {}_1F_1 \left(\frac{n+1-i\gamma}{2}, n+1, ix \right), \quad (2)$$

где $-\infty < \gamma < \infty$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ непрерывный и дискретный азимутальный параметры моды (номера моды), от которых зависят функции (2) и которые будем называть номерами моды; $z_0 = \frac{kw^2}{2}$ – аналог длины Релея, w – параметр моды, аналогичный радиусу гауссового пучка, хотя здесь он имеет другой смысл; $x = \frac{kr^2}{2z}$; $\Gamma(x)$ – гамма функция; ${}_1F_1(a, b, x)$ – вырожденная или конфлюэнтная гипергеометрическая функция:

$${}_1F_1(a, b, x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} \exp(xt) dt, \quad (3)$$

где $\text{Re}(b) > \text{Re}(a) > 0$. Из (3) видно, что ${}_1F_1(a, b, x)$ – это целая аналитическая функция. В случае (2) $\text{Re}(x)=0$ и тогда уравнение (3) является одномерным преобразованием Фурье от ограниченной функции на отрезке $[0, 1]$. По теореме Шеннона асимптотически при $r \rightarrow \infty$ период модуляции функции (2) (т.е. расстояние между соседними максимумами или минимумами) равно 2π . При больших значениях аргумента $x \gg 1$ имеет место асимптотика

$$x^{\frac{n}{2}} \left| {}_1F_1\left(\frac{n+1-i\gamma}{2}, n+1, ix\right) \right| \approx \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Поэтому уменьшение модуля функции (2) пропорциональное $1/r$ при $r \gg 1$ происходит быстрее, чем уменьшение амплитуды функции Бесселя (пропорционально $1/\sqrt{r}$).

Реализовать световые пучки (2), которые в дальнейшем будем называть гипергеометрическими (ГГ) модами, можно с помощью оптического элемента, имеющего функцию пропускания:

$$E_{\gamma, n}(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{w}{\rho}\right) \exp\left[i\gamma \ln\left(\frac{\rho}{w}\right) + in\theta\right]. \quad (4)$$

При освещении оптического элемента (4), расположенного в плоскости $z=0$, неограниченной плоской волной на расстоянии z сформируется световое поле с комплексной амплитудой (2). Энергия световых полей (2) и (4) неограниченна, как и у параксиальной моды Бесселя

$$E_{\beta, n}(r, \varphi, z) = J_n(\beta r) \exp\left[i\frac{\beta^2 z}{2k} + in\varphi\right],$$

где $\beta = k \sin \theta$, θ – угол наклона конической волны к оси z . Мода Бесселя также удовлетворяет ур. (1). Поэтому на практике для реализации моды (2) оптический элемент (4) следует ограничивать кольцевой диафрагмой. При этом на конечном расстоянии $z_0 < R \tan(\gamma/R)$, где R – большой радиус кольцевой диафрагмы, будет приближенно формироваться мода (2).

Световое поле (2) при распространении сохраняет свою структуру и меняется только масштабно. Поперечное распределение интенсивности ГГ моды (2) представляет собой набор концентрических световых колец, радиусы которых удовлетворяют условию:

$$\rho_m = \sqrt{\frac{\alpha_m z \lambda}{\pi}}, \quad (5)$$

где α_m – постоянные, зависящие от номера кольца m и от номеров моды (γ, n) . Из (5) следует, что радиусы колец увеличиваются с ростом z как $z^{1/2}$. Из соотношения [13]:

$$\begin{aligned} & {}_1F_1\left(\frac{n+1+i\gamma}{2}, n+1, -ix\right) = \\ & = \exp(-ix) {}_1F_1\left(\frac{n+1-i\gamma}{2}, n+1, ix\right) \end{aligned}$$

следует, что фаза гипергеометрической функции равна $x/2$: $\arg\left\{{}_1F_1\left(\frac{n+1+i\gamma}{2}, n+1, -ix\right)\right\} = \frac{x}{2}$.

Интересно, что эта фаза не зависит от номеров моды (γ, n) . Тогда можно записать выражение для фазы ГГ-моды:

$$\arg\{E_{\gamma, n}(r, \varphi, z)\} = \frac{\gamma}{2} \ln \frac{z}{z_0} + n\varphi + \frac{kr^2}{4z} + \frac{\pi}{4}(3n-1) + \arg\Gamma\left(\frac{n+1-i\gamma}{2}\right), \quad (6)$$

где первое слагаемое имеет смысл фазы Гоу (Gouy).

2. Расчет сил

При моделировании формирования ГГ моды использовалось преобразование Френеля:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\gamma, n}(r, \varphi, z) &= \frac{k}{2\pi iz} \exp\left(i\frac{k}{2z} r^2\right) \times \\ & \int_0^{2\pi} \int_0^\infty E_{\gamma, n}(\rho, \theta) \exp\left(i\frac{k}{2z} \rho^2\right) \exp\left[-i\frac{k}{z} r\rho \cos(\theta-\varphi)\right] \rho d\rho d\theta \end{aligned} \quad (7)$$

от входной функции $E_{\gamma, n}(\rho, \theta)$ (4).

Для расчета вращающей силы использовался метод описанный в [6]. Сила рассчитывалась на наиболее ярком кольце ГГ моды, для сферического микрообъекта с диаметром в половину ширины наиболее яркого кольца ГГ моды, по формуле.

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{c} \iint_{\Omega} I(x, y) (a_x - c_x) dx dy \\ F_y &= \frac{1}{c} \iint_{\Omega} I(x, y) (a_y - c_y) dx dy \end{aligned} \quad (8)$$

где Ω – область максимального по площади сечения микрочастицы в плоскости перпендикулярной направлению распространения светового пучка, $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c}(c_x, c_y, c_z)$ – единичные вектора задают направление падающего и преломленных лучей. Микрочастица размещалась по центру самого яркого кольца, в этом случае возникает сила направленная вдоль кольца

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}.$$

При изменении параметра γ меняется поперечный размер гипергеометрического пучка. При этом если параметры n и γ имеют разные знаки, поперечный размер гипергеометрического пучка уменьшается, как это хорошо видно из рис. 1.

На рис. 1 показаны распределения интенсивности различных ГГ-моды с $n=3$ при различных параметрах γ , рассчитанные по формуле (7) на расстоянии $z=3500$ мм, а также фазы ДОО для формирования этих пучков, длина волны 532 нм. Размер картин на рис. 1 для фазы 5×5 мм, для интенсивности 1×1 мм. Число отсчетов – 512×512 .

Для гипергеометрических мод с параметром $n=3$, и параметром γ который менялся в интервале $[-10, 10]$, была рассчитана сила, действующая на микрообъект вдоль светового кольца. Для простоты сила нормировалась на значение силы для $\gamma=0$. На рис. 2 представлен график зависимости силы F от параметра γ .

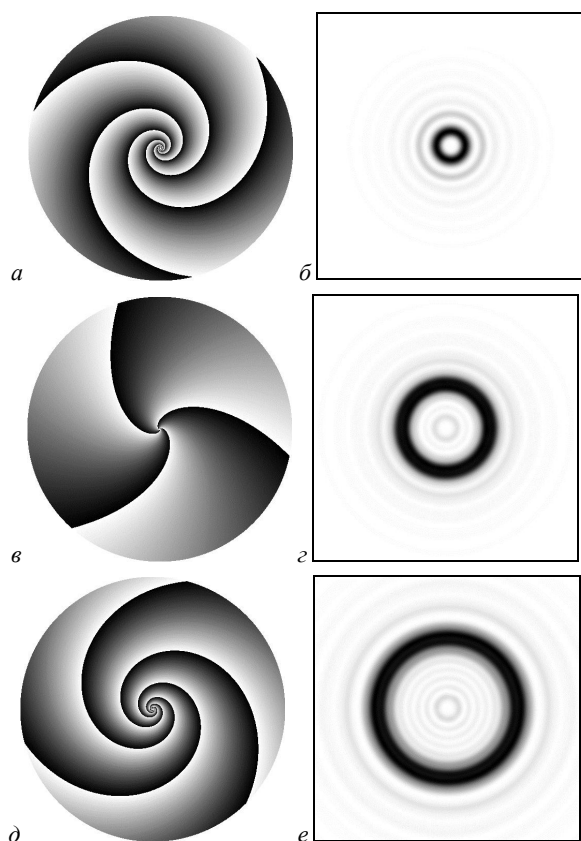


Рис. 1. Фазы ДООЭ (а, в, д) и распределения интенсивности (б, з, е) гипергеометрических мод с одинаковым индексом $n=3$ и параметрами $\gamma=-8$ (а, б), $\gamma=2$ (в, з), $\gamma=8$ (д, е) на расстоянии $z=3500$ мм.

Как видно из рис.2 при $\gamma=-8$, сила превышает силу при $\gamma=0$ (простой оптический вихрь) в четыре раз. И наоборот при $\gamma=8$ сила меньше, чем сила при $\gamma=0$ в шесть раз.

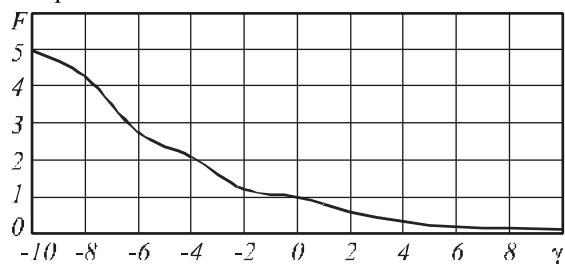


Рис.2 График зависимости силы, действующей на микробиъект в гипергеометрическом пучке с $n=3$, в зависимости от значения параметра γ

Столь значительное изменение силы очевидно вызвано изменением поперечных размеров пучка. На рис.3 представлен график зависимости радиуса самого яркого кольца ГГ пучка в зависимости от значения параметра γ . Радиус определен в безразмерных единицах, где за единицу принят радиус кольца при $\gamma=0$.

Как видно из рис.3 при $\gamma=-8$ радиус уменьшается примерно в два с половиной раза по сравнению с радиусом при $\gamma=0$. Для $\gamma=8$ радиус увеличивается еще меньше, примерно в 2,2 раза. Т.е. изменение ра-

диуса при изменении γ не столь велико, как изменение силы. В чем же причина более быстрого роста силы при увеличении отрицательного γ ? Сила действующая на микробиъект должна, очевидно, возрастать пропорционально интенсивности на кольце. А интенсивность на кольце обратно пропорциональна произведению радиуса кольца на его ширину. Из рис.1б, рис.1д, рис.1е можно видеть, что кроме изменения радиуса кольца меняется его ширина. При этом ширина меняется примерно так же как радиус кольца, что хорошо видно из графика зависимости ширины кольца от значения параметра γ , для ГГ пучка с $n=3$.

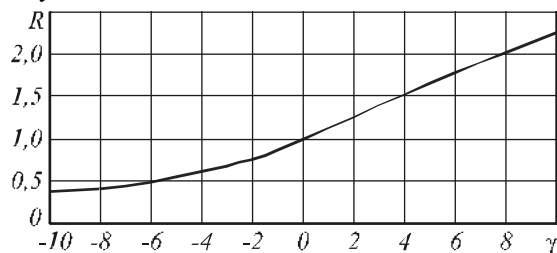


Рис.3 График зависимости радиуса наиболее яркого кольца ГГ пучка с $n=3$, в зависимости от значения параметра γ

Размер микробиъекта при расчете подбирался так, чтобы он целиком размещался внутри самого яркого кольца при любом γ .

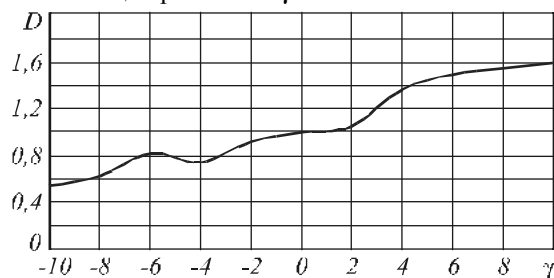


Рис.4 График зависимости ширины наиболее яркого кольца ГГ пучка с $n=3$, в зависимости от значения параметра γ

Однако нельзя бесконечно уменьшать пучок за счет увеличения абсолютного значения отрицательного параметра γ . Начиная с некоторого значения γ центральная часть фазового ДООЭ перестает правильно отображаться при заданном разрешении. Так, при размерности 512×512 уже при $\gamma=20$ центральная часть ДООЭ записывается с явными ошибками (рис.5а), при этом в пучке появляются дополнительные кольца по яркости сравнимые с центральным наиболее ярким кольцом.

При этом сила, действующая на микробиъект существенно уменьшилась и составляет всего 1,2 от величины силы при $\gamma=0$. Приведенные выше результаты получены для гипергеометрических пучков, распространяющихся в свободном пространстве. При фокусировке этих пучков получить существенное увеличение силы за счет уменьшения диаметра пучка не получается.

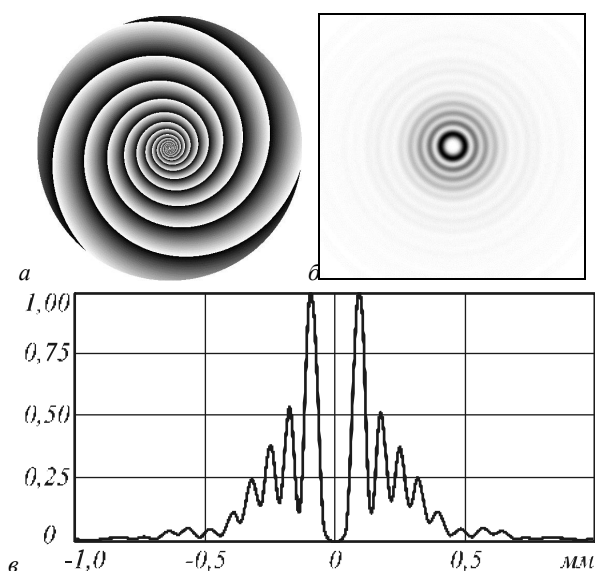


Рис. 5. Фаза ДОЭ (а) и распределение интенсивности (б) ГГ моды с индексом $n=3$ и параметром $\gamma=-20$ на расстоянии $z=3500$ мм, центральное сечение распределения интенсивности (в).

Но в этом случае, тем не менее, удается получить центральное наиболее яркое кольцо меньшего диаметра, чем то же самое кольцо в простом оптическом вихре. Так для оптического вихря с параметром $n=1$ размер центрального кольца может быть близок к дифракционному пределу, поэтому для задач оптического вращения микрообъектов важно иметь возможность формирования светового кольца меньшего радиуса. На рис. 6 можно видеть, что при фокусировке гипергеометрического пучка с параметром $\gamma=-4$ центральное кольцо получившегося пучка имеет диаметр на 20% меньше, чем то же самое кольцо у сфокусированного простого оптического вихря.

Как видно из рис.6а и рис.6б при увеличении модуля отрицательного параметра γ происходит уменьшение диаметра центрального кольца. К увеличению вращающей силы это не приводит, т.к. при этом возрастает доля энергии в дополнительных кольцах

Заключение

В работе проведен расчет сил действующих на микрообъекты в гипергеометрических световых пучках. Показано, что использование гипергеометрических пучков с отрицательными значениями параметра γ позволяет существенно увеличить силу действующую на микрообъект вдоль светового кольца по сравнению с той же силой, действующей на микрообъект в простых оптических вихрях ($\gamma=0$) [7]. Также показана возможность уменьшения поперечных размеров центрального кольца гипергеометрического сфокусированного пучка при отрицательных значениях параметра γ .

Благодарности

Работа выполнена при поддержке «Фонда содействия отечественной науке», российско-американской

программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (CRDF Project SA-014-02), а также грантов РФФИ 07-07-97600, 08-07-99007.

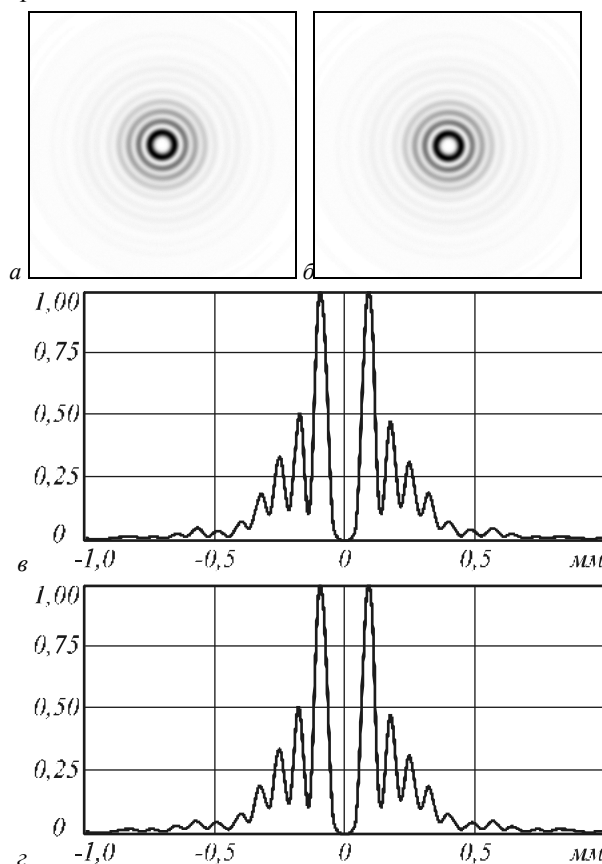


Рис. 6. Сечение распределения интенсивности ГГ моды с индексом $n=1$ и параметром $\gamma=0$ в плоскости фокусировки микрообъектива (60x) (а), сечение распределения интенсивности ГГ моды с индексом $n=1$ и параметром $\gamma=-4$ в плоскости фокусировки микрообъектива (60x) (в,г).

Литература

1. **W. Miller, Jr.** Symmetry and Separation of Variables, Addison-Wesley Pub. Com., MA, 1977.
2. **J. Durnin, J. J. Jr Miceli, J. H. Eberly,** "Diffraction-free beams", Phys. Rev. Lett., 58, 1499–1501 (1987)
3. **A.E. Sigman,** Lasers, University Science, Mill Valley, Calif, 1986
4. **В.В. Котляр, Р.В. Скиданов, С.Н. Хонина, С.А. Балалаев** Гипергеометрические моды // Компьютерная оптика – 2006. Вып. 30, с. 16-22.
5. **V. V. Kotlyar, R. V. Skidanov, S. N. Khonina, V. A. Soifer** Hypergeometric modes // Opt. Lett. – 2007. Vol. 32, No. 7, April 1, p.742-744.
6. **Р.В. Скиданов** Расчет силы взаимодействия светового пучка с микрочастицами произвольной формы // Компьютерная оптика - 2005, Вып.28, с.18-22.
7. **V.V. Kotlyar, A.A. Almazov, S.N. Khonina, V.A. Soifer, H.Elfstrom, J. Turunen,** Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate, J. Opt. Soc. Am. A, v.22, no.5, pp. 849-861 (2005)

CALCULATING FORCES ACTING UPON A SPHERICAL MICROBJECT IN HYPERGEOMETRIC BEAMS

R.V. Skidanov^{1,2}, S.N. Khonina^{1,2}, A.A. Morozov², V.V. Kotlyar^{1,2}

¹Image Processing Systems Institute of the RAS,

²Samara State Aerospace University

Abstract

We numerically calculate forces acting upon a spherical microobject in a new family of paraxial laser beams. When propagated in homogeneous space, these beams retain their structure up to scale. It is numerically shown that when the mode's azimuth number remains unchanged, while the radial number changes severalfold, the force exerted upon the microbead of diameter less than the width of the mode's bright diffraction ring changes in nearly the same proportion.

Keywords: hypergeometric beams, paraxial laser beams, optical forces, spherical microobjects, diffraction ring.

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Science Foundation, the Russian-American Basic Research and Higher Education Program (CDF Project SA-014-02), and the Russian Foundation for Basic Research (grants 07-07-97600 and 08-07-99007).

Citation: Skidanov RV, Khonina SN, Morozov AA, Kotlyar VV. Calculating forces acting upon a spherical microobject in hypergeometric beams [In Russian]. Computer Optics 2008; 32(1): 39-42.

References

- [1] Miller W Jr. Symmetry and Separation of Variables. Addison-Wesley Pub. Com., MA; 1977.
 - [2] Durnin J, Miceli JJ Jr, Eberly JH. Diffraction-free beams. Phys. Rev. Lett. 1987; 58: 1499-1501.
 - [3] Sigman AE. Lasers. University Science, Mill Valley, Calif 1986.
 - [4] Kotlyar VV, Skidanov RV, Khonina SN, Balalaev SA. Hypergeometric modes [In Russian]. Computer Optics 2006; 30: 16-22.
 - [5] Kotlyar VV, Skidanov RV, Khonina SN, Soifer VA. Hypergeometric modes. Opt. Lett. 2007; 32 (7): 742-744.
 - [6] Skidanov RV. The calculation of the force of interaction of the light beam with micro particles of arbitrary form [In Russian]. Computer Optics 2005; 28: 18-21.
 - [7] Kotlyar VV, Almazov AA, Khonina SN, Soifer VA, Elfstrom H, Turunen J. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate. J. Opt. Soc. Am. A 2005; 22 (5): 849-861.
-