

ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА, ОПТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

МОДЫ ПЛАНАРНОГО ГРАДИЕНТНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО СЕКАНСНОГО ВОЛНОВОДА

Котляр В.В.^{1,2}, Ковалев А.А.^{1,2}, Триандафилов Я.Р.^{1,2}, Налимов А.Г.^{1,2}¹ Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева,
² Учреждение Российской академии наук Институт систем обработки изображений РАН

Аннотация

Получены аналитические выражения для ТЕ- и ТМ- мод планарного гиперболического секансного (ГС) волновода, которые являются частным случаем более общих мод, распространяющихся в волноводах Эпштейна. Получено выражение для периода Тальбота (или фокусного расстояния) для ТЕ-мод в планарном ГС-волноводе, и показано, что для ТМ-мод не возникает периодичность и нет фокусировки в ГС-волноводе. Получены выражения для полной ширины по полуспаду интенсивности и нормированной интенсивности для основной ТЕ-моды в ГС-волноводе, и найдены параметры ГС-волновода, при которых ширина основной моды минимальна и равна 0,11 от длины волны. С помощью моделирования программой FullWAVE показано модовое распространение световых полей с начальными аналитически полученными амплитудами в ограниченных ГС-волноводах и периодическое повторение немодовых световых полей в волноводе с периодом Тальбота. С помощью моделирования также показано, что ГС-линза, являющаяся «куском» ГС-волновода, фокусирует плоскую ТЕ-волну в субволновое фокусное пятно шириной по полуспаду интенсивности 0,131 от длины волны.

Ключевые слова: градиентный планарный волновод, гиперболический секансный волновод, ТЕ- и ТМ- моды, волновод Эпштейна, период Тальбота, ширина моды, гиперболическая секансная линза, субволновая фокусировка.

Введение

В последнее время возрос интерес к планарным градиентным и фотонно-кристаллическим линзам, которые способны обеспечить субволновую фокусировку лазерного света [1-4]. Они применяются для ультракомпактного сопряжения планарных волноводов разной ширины [5]. В качестве планарной градиентной линзы используется линза, показатель преломления которой зависит от поперечной координаты как гиперболический секанс. Гиперболическая секансная (ГС) линза имеет свою долгую историю. Еще в 1930 году П.С. Эпштейн [6] рассмотрел задачу расчета мод для градиентного волновода со сложным показателем преломления, обобщающим ГС-профиль. В 1951 году А.Л. Микаэлян [7] нашел, что ГС-профиль показателя преломления является оптимальным для фокусировки света. Поэтому ГС-линза Микаэляна является частным случаем градиентного волновода Эпштейна. Далее задача распространения света в ГС-волноводе и ГС-линзе решалась в геометрикооптическом [8,9], квазиоптическом [10] и волновом [11-14] приближениях. В [15,16] описаны экспериментальные результаты по фокусировке света с помощью ГС-линзы. В [17] ГС-линза используется для сверхразрешения совместно с рефракционной и дифракционной линзами. В известной монографии М. Адамса [18] дан обзор работ по волноводам Эпштейна и ГС-волноводам.

В данной работе получено выражение для периода Тальбота (или фокусного расстояния) для ТЕ-мод в планарном ГС-волноводе и показано, что для ТМ-мод не возникает аналогичная периодичность и нет фокусировки в ГС-волноводе. Показано, что в ГС-волноводе с «пьедесталом» для ТЕ-мод эффект Тальбота и фокусировки также отсутствуют.

Получены выражения для полной ширины по полуспаду интенсивности и нормированной интенсивности для основной ТЕ-моды в ГС-волноводе. Найдены параметры ГС-волновода, при которых ширина основной моды минимальна, а ее интенсивность на оси волновода максимальна.

1. ТЕ-моды планарного ГС-волновода

Рассмотрим планарный ГС-волновод с зависимостью показателя преломления вида

$$n(x) = \frac{n}{\operatorname{ch}(x/a)}, \quad (1)$$

где n – показатель преломления на оси z при $x=0$, x – поперечная координата волновода, a – полуширина волновода по спаду показателя преломления в 1,54 раза. На рис. 1 показан профиль (1) ГС-волновода для $n=3,47$ и $a=\lambda/2=0,775$ мкм, $\lambda=1,55$ мкм – длина волны света.

Решение уравнения Максвелла для монохроматического света для ТЕ-поляризации сводится к решению уравнения Гельмгольца для проекции электрического вектора E_y на ось y , которая перпендикулярна плоскости волновода (x, z)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 n^2(x) \right] E_y(x, z) = 0, \quad (2)$$

где $k=2\pi/\lambda$ – волновое число света. С учетом (1) и используя разделение переменных

$$E_y(x, z) = \exp(i\beta z/a) E(x), \quad (3)$$

уравнение (2) сводится к уравнению для $E(x)$:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{k^2 n^2}{\operatorname{ch}^2(x/a)} - \frac{\beta^2}{a^2} \right] E(x) = 0, \quad (4)$$

где β – безразмерная постоянная распространения. Решение уравнения (4) можно найти аналогично решению скалярного уравнения для волновода Эпштейна [18].

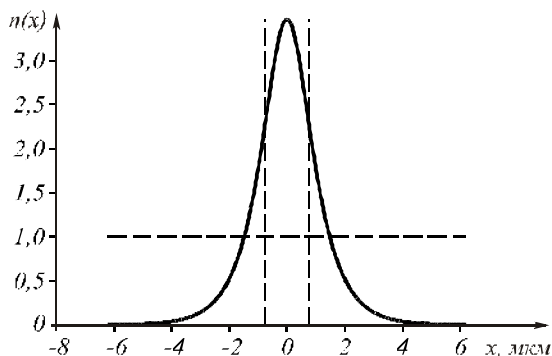


Рис. 1. Зависимость показателя преломления от координаты для ГС-волновода (1). Вертикальные пунктирные линии при $x = \pm a$, горизонтальная линия при $n(x) = 1$

Сделав замену переменных $y = \exp(2x/a)$ и разделив полученное уравнение на $4y^{2/a^2}$, получим

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d}{dy} + \frac{k^2 a^2 n^2}{y(1+y)^2} - \frac{\beta^2}{4y^2} \right] E(y) = 0. \quad (5)$$

Заменим функцию $E(y)$ на $y^p (1+y)^q \Psi(y)$, где p и q – параметры, которые будут определены ниже. Подставив это решение в (5) и разделив уравнение на $y^{p-1} (1+y)^{q-1}$, получим:

$$y(1+y)\Psi'' + [(2p+1)(1+y) + 2qy]\Psi' + \left(p^2 - \frac{\beta^2}{4} \right) \frac{1+y}{y} \Psi + q(q-1)\Psi + (2p+1)q\Psi + [k^2 a^2 n^2 - q(q-1)] \frac{\Psi}{1+y} = 0. \quad (6)$$

При $p = \beta/2$ и $q = [1 - (1 + 4k^2 a^2 n^2)^{1/2}] / 2$ уравнение (6) преобразуется в гипергеометрическое дифференциальное уравнение [19, формула 15.5.1]:

$$y(1+y)\Psi'' + \{ (2p+1) + [(q+2p) + q+1]y \} \Psi' + (q+2p)q\Psi = 0, \quad (7)$$

решением которого являются гипергеометрические функции ${}_2F_1(q+2p, q; 2p+1; -y)$. Чтобы полученное решение обладало конечной энергией, первый параметр гипергеометрической функции выберем целым отрицательным числом $-m$ (в этом случае функция становится многочленом). Тогда решение уравнения (4) имеет следующий вид

$$E_m(y) = \frac{y^{\beta/2} {}_2F_1(-m, -m - \beta, \beta + 1, -y)}{(1+y)^{\beta+m}}. \quad (8)$$

Учитывая, что $y = \exp(2x/a)$, получим выражение для ТЕ-мод ГС-волновода

$$E_m(x, z) = \frac{\exp(i\beta z/a) {}_2F_1(-m, -m - \beta, \beta + 1, -y)}{\text{ch}^\beta(x/a) (1+y)^m}, \quad (9)$$

где $y = \exp(2x/a)$, m – положительное целое число. Уравнение для нахождения постоянных распространения мод (дисперсионное уравнение) имеет вид

$$2\beta = \sqrt{1 + 4k^2 a^2 n^2} - (2m + 1). \quad (10)$$

Уравнение (10) получается из условия, что амплитуда (9) будет ограниченной при условии, что $b = -m$. В этом случае гипергеометрическая функция становится многочленом. Сама гипергеометрическая функция имеет вид [19]

$${}_2F_1(b, c, d, x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(b)_p (c)_p}{(d)_p} \frac{x^p}{p!}, \quad (11)$$

где $(b)_p = \Gamma(b+p)/\Gamma(b)$ – символ Похгаммера. Из (9) можно получить три первые ТЕ-моды ГС-волновода ($m = 0, 1, 2$)

$$E_0(x, z) = \frac{\exp(i\beta z/a)}{\text{ch}^\beta(x/a)}, \quad (12)$$

$$E_1(x, z) = \frac{-\exp(i\beta z/a) \text{sh}(x/a)}{\text{ch}^{\beta+1}(x/a)}, \quad (13)$$

$$E_2(x, z) = \frac{\exp(i\beta z/a) \left[\text{sh}^2(x/a) - \frac{1}{2(\beta+1)} \right]}{\text{ch}^{\beta+2}(x/a)}. \quad (14)$$

На рис. 2 показаны амплитуды (9) при $z = 0$ первых четырех ТЕ-мод ГС-волновода (рис. 2а) и амплитуда десятой моды (рис. 2б). Из рис. 2 видно, что с ростом номера моды число локальных «лепестков» моды увеличивается, а их размер вблизи оптической оси уменьшается. Из рис. 2 можно оценить, что ширина модуля амплитуды (по полуспаду) основной моды равна примерно $a = \lambda/2$, а ширина локального максимума десятой моды ($m = 10$) – $a/6 = \lambda/12$. Заметим, что из (10) следует, что максимальный номер моды, при котором β еще положительно, равен $M = [\beta_0]$, где $\beta_0 = (\sqrt{1 + 4k^2 a^2 n^2} - 1) / 2$, $[\beta_0]$ – знак целой части числа β_0 ($M = 10$ при $a = \lambda/2$).

Из (1) видно, что показатель преломления ГС-волновода меняется от n до нуля. Хотя в реальности он не может быть меньше 1. Поэтому моды (9) являются модельными модами, которые отличаются от мод реальных ограниченных волноводов или волноводов с оболочкой.

Случай ограниченного волновода будет рассмотрен в разделе 4. С модельностью мод (9) связано, в частности, ограничение на число мод, которое следует из (10) $m < M = [\beta_0]$. Аналогичная ситуация возникает и для параболического волновода [18]. Но при теоретическом исследовании это обстоятельство игнорируют и считают, что ГС-волновод имеет счетный и полный базис модовых функций (9), хотя

моды (9) не ортогональны и ненормированы. С учетом сказанного любое световое поле в ГС-волноводе (1) можно разложить по базисным функциям (9)

$$E(x, z) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \exp(i\beta_m z/a) \Psi_m(x), \quad (15)$$

где

$$\Psi_m(x) = \frac{{}_2F_1(-m, -m - \beta_m, \beta_m + 1, -y)}{\text{ch}^{\beta_m}(x/a)(1+y)^m}, \quad (16)$$

C_m – коэффициенты разложения, β_m – этим обозначением показано, что постоянные распространения β зависят от номера моды. В выражении для постоянной распространения (10) можно выделить слагаемое, не зависящее от номера m , и вынести за знак суммы соответствующий множитель:

$$E(x, z) = \exp(i\beta_0 z/a) \sum_{m=0}^{\infty} C_m \exp(-imz/a) \Psi_m(x), \quad (17)$$

где $\beta_0 = (\sqrt{1 + 4k^2 a^2 n^2} - 1) / 2$.

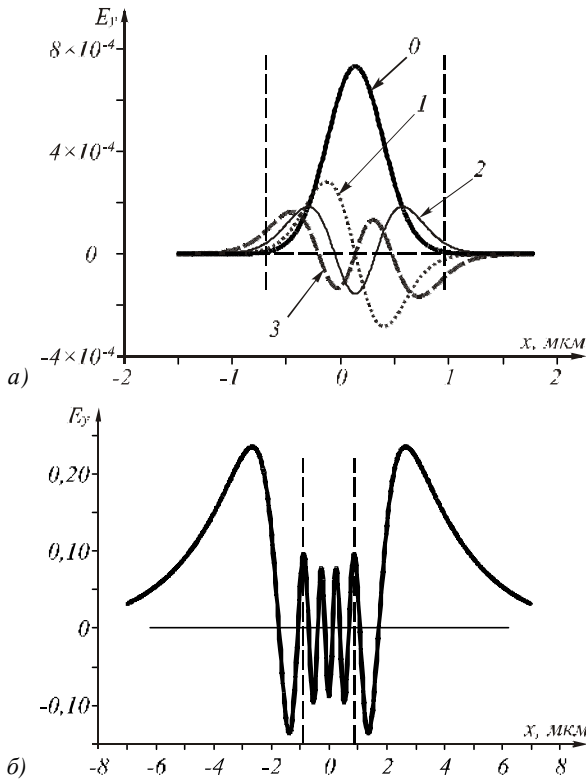


Рис. 2. Графики при $z = 0$ амплитуд (9) первых четырех мод (а): $m = 0$ (кривая 0), $m = 1$ (кривая 1), $m = 2$ (кривая 2), $m = 3$ (кривая 3) и график десятой моды $m = 10$ (б). Вертикальные пунктирные линии при $x = \pm a$

Из (17) следует, что на расстоянии

$$L = 2\pi a \quad (18)$$

разности фаз между модами (16) станут такими же, какими они были при $z = 0$. То есть световое поле (17) будет повторяться с периодом L . Поэтому величина (18) называется периодом Тальбота. Если вме-

сто бесконечно протяженного ГС-волновода рассмотреть только его часть от $z = 0$ до $z = L/2$, то освещая такую ГС-линзу плоской ТЕ-волной со стороны $z = 0$ на выходе линзы при $z = L/2$ сформируется фокус: все лучи, параллельные оптической оси, соберутся в одну точку на оптической оси. Поэтому расстояние $L/2$ можно назвать фокусным расстоянием ГС-линзы.

С помощью (12) можно найти ширину основной ТЕ-моды из условия по полуспаду интенсивности

$$I_0(x, z) = \text{ch}^{-2\beta}(x/a) = 1/2. \quad (19)$$

Из (19) следует выражение для ширины основной моды:

$$FWHM = 2a \ln(2^{1/(2\beta_0)} + \sqrt{2^{1/\beta_0} - 1}). \quad (20)$$

На рис. 3 показана зависимость ширины основной моды ($FWHM$), умноженной на kn , от безразмерной ширины волновода kan .

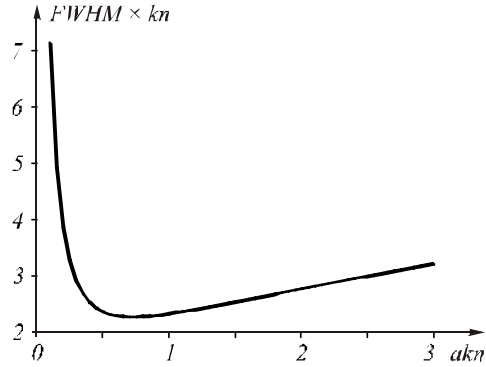


Рис. 3. Зависимость ширины основной ТЕ-моды (20) от безразмерной ширины ГС-волновода

На рис. 3 минимальная ширина основной моды равна ($n = 3,47$)

$$FWHM = \frac{2,26}{kn} = 0,11\lambda, \quad (21)$$

которая достигается при ширине волновода $a = 0,72/(kn) = 0,03\lambda$.

При $a = 0,03\lambda$ ширина волновода равна 178 нм (0,115 λ). Именно при такой ширине показатель преломления падает от максимума в центре до единицы на краю. Численное моделирование конечно-разностным методом FDTD показало, что и при такой ширине в волноводе распространяется фундаментальная мода $E_0(x, z)$. Ширина такой моды по полуспаду оказывается меньше, чем предсказывает формула (21): 0,05 λ . Это можно объяснить тем, что формула (21) получена для волновода бесконечной ширины, в то время как при моделировании использовался волновод шириной 178 нм.

Если нормировать основную ТЕ-моду (12) на единичную энергию

$$A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\text{ch}^{2\beta_0}(x/a)} = 1, \quad (22)$$

где

$$A = \left[\frac{2^{1-2\beta_0} \Gamma(2\beta_0)}{a \Gamma^2(\beta_0)} \right]^{1/2}, \quad (23)$$

A – нормировочная константа, $\Gamma(x)$ – гамма-функция [19], то получим выражение для интенсивности нормированной основной моды:

$$I_0(x) = \frac{2^{1-2\beta_0} \Gamma(2\beta_0)}{a \Gamma^2(\beta_0) \operatorname{ch}^{2\beta}(x/a)}. \quad (24)$$

На рис. 4 показана зависимость максимальной интенсивности (в произвольных единицах) основной ТЕ-моды на оптической оси ГС-волновода от безразмерной ширины волновода kan .

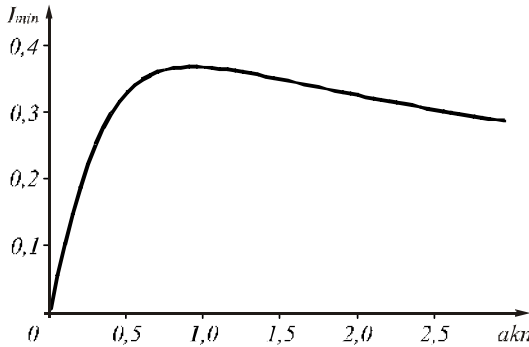


Рис. 4. Зависимость максимальной интенсивности основной моды на оптической оси ГС-волновода от безразмерной ширины волновода kan

Из рис. 4 следует, что интенсивность основной моды на оптической оси будет максимальна при ширине волновода $a = 0,93/(kn) = 0,04\lambda$. Из сравнения рис. 3 и 4 видно, что минимальная ширина моды и максимальная интенсивность моды на оси достигаются при разных значениях ширины волновода: $a = 0,72/(kn) = 0,03\lambda$ и $a = 0,93/(kn) = 0,04\lambda$, хотя размеры этих волнопроводов существенно субволновые ($\lambda = 1,55$ мкм): $2a = 93$ нм и $2a = 124$ нм. Заметим: в [20, 21] показано, что для ступенчатых кварцевых волокон ($n = 1,44$ и $\lambda = 1,55$ мкм) минимальный диаметр составляет $0,2\lambda$. В этом случае более 97% энергии моды распространяется за волокном. При диаметре меньше $0,2\lambda$ резко возрастают оптические потери в волноводе, связанные с флуктуациями его диаметра и шероховатостями на его поверхности. Однако в [22] было изготовлено кварцевое проволочное (без оболочки) волокно диаметром 50 нм с потерями всего 0,1 Дб/мм.

2. ТЕ-моды ГС-волновода с «пьедесталом»

У планарного ГС-волновода с «пьедесталом» следующая зависимость показателя преломления от поперечной координаты

$$n^2(x) = n_1^2 + \frac{(n^2 - n_1^2)}{\operatorname{ch}^2(x/a)}, \quad (25)$$

где n_1 – показатель преломления среды, в которой создан градиентный волновод. Наличие среды с показателем преломления $n_1 > 1$ позволяет не огра-

ничивать волновод с показателем (1) условием $n(x) > 1$, которое приводит к видоизменению световых мод, распространяющихся в среде. Решение уравнения (2) для ТЕ-мод в среде с показателем (25) имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{E}_m(x, z) &= \\ &= \frac{\exp(i\beta z/a) {}_2F_1(-m, -m - \gamma, \gamma + 1, -y)}{\operatorname{ch}^\gamma(x/a)(1+y)^m}, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$2\gamma = 2\sqrt{\beta^2 - k^2 a^2 n^2} = \sqrt{1 + 4k^2 a^2 n^2} - (2m + 1). \quad (27)$$

Все обозначения в (26) такие же, как в (9). Из (27) следует уравнение для постоянных распространения ТЕ-мод в ГС-волноводе с «пьедесталом»

$$\beta = \left\{ k^2 a^2 n^2 + \frac{1}{4} \left[\sqrt{1 + 4k^2 a^2 n^2} - (2m + 1) \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (28)$$

Из (28) следует, что нельзя ввести период Тальбота (18), так как в выражении для β нельзя выделить аддитивное слагаемое, зависящее от номера моды m , как это было сделано для выражения (10). То есть, несмотря на то, что показатель преломления ГС-волновода с «пьедесталом» (25) удобнее, чем показатель (1), при практической реализации ГС-линзы, но такая линза не будет обладать свойством «идеальной» фокусировки, когда все лучи, параллельные оптической оси, собираются в одной точке фокуса.

3. ТМ-моды ГС-волновода

Уравнение Гельмгольца для планарного волновода с показателем преломления $n^2(x) = \epsilon(x)$ для ТМ-поляризованной волны имеет вид

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 n^2(x) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\epsilon(x)} \frac{d\epsilon(x)}{dx} \frac{\partial}{\partial x} \right] H_y(x, z) = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

где $H_y(x, z)$ – комплексная амплитуда проекции на ось y магнитного вектора волны. Разделяя переменные $H_y(x, z) = \exp(i\beta z/a) H(x)$, для функции $H(x)$ получим уравнение

$$\begin{aligned} &\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{\epsilon(x)} \frac{d\epsilon(x)}{dx} \frac{d}{dx} + k^2 n^2(x) - \frac{\beta^2}{a^2} \right] \times \\ &\times H(x) = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

После замены $H(x) = n(x)F(x)$ уравнение (30) сводится к уравнению

$$\begin{aligned} &\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2\epsilon(x)} \frac{d^2\epsilon(x)}{dx^2} - \right. \\ &\left. - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\epsilon(x)} \frac{d\epsilon(x)}{dx} \right)^2 + k^2 n^2(x) - \frac{\beta^2}{a^2} \right] F(x) = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Для ГС-волновода (1) вместо (31) получим

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{k^2 n^2}{ch^2(x/a)} - \frac{\beta^2}{a^2} - \frac{1}{a^2} \right) \right] F(x) = 0. \quad (32)$$

Если ввести параметр $\eta^2 = \beta^2 + 1$, то уравнение (32) будет эквивалентно уравнению (4) для ТЕ-поляризации. Тогда, с учетом решения (9), решение уравнения (29) для ТМ-мод ГС-волновода будет иметь вид

$$H_m(x, z) = \frac{\exp(i\beta z/a) {}_2F_1(-m, -m - \eta, \eta + 1, -y)}{ch^\eta(x/a)(1+y)^m}, \quad (33)$$

где

$$2\eta = 2\sqrt{\beta^2 + 1} = \sqrt{1 + 4k^2 a^2 n^2} - (2m + 1). \quad (34)$$

Из (34) следует дисперсионное уравнение для нахождения постоянных распространения ТМ-мод

$$\beta = \left\{ \frac{1}{4} \left[\sqrt{1 + 4k^2 a^2 n^2} - (2m + 1) \right]^2 - 1 \right\}^{1/2}. \quad (35)$$

Так как в (35), аналогично (28), нельзя выделить аддитивное слагаемое, зависящее от номера моды m , то значит ТМ-поляризованное излучение не фокусируется ГС-линзой и нельзя ввести период Тальбота, аналогичный (18). Из (34) следует, что при $0 < \eta < 1$ постоянная распространения моды β будет комплексной величиной. Это означает, что в ГС-волноводах с шириной $a \leq \sqrt{2}/(kn)$ не будут распространяться световые моды с ТМ-поляризацией, а возможны только вытекающие моды.

4. ТЕ-моды ограниченного ГС-волновода

ГС-волновод (1) практически нереализуемый, так как $n(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Поэтому рассмотрим ограниченный ГС-волновод

$$n(x) = \begin{cases} \frac{n}{ch(x/a)}, & |x| < b, \\ 1, & |x| > b, \end{cases} \quad (36)$$

где $b = a \ln \left[\frac{n + \sqrt{n^2 - 1}}{2} \right]$ найдено из уравнения $n(b) = 1$. Решение уравнения (2) для ТЕ-мод в ГС-волноводе с показателем (36) имеет вид

$$E_y(x, z) = \exp(i\beta z/a) \times \begin{cases} {}_2F_1(\beta + d, d, \beta + 1, -y)(1+y)^d y^{\beta/2}, & |x| < b, \\ {}_2F_1(\beta + d, d, \beta + 1, -y_0)(1+y_0)^d y_0^{\beta/2} e^{\chi(b-|x|)}, & |x| > b, \end{cases} \quad (37)$$

где

$$d = \left(1 - \sqrt{1 + 4k^2 a^2 n^2} \right) / 2, \quad \beta^2 = \chi^2 + k^2, \quad y_0 = \exp(2b/a).$$

Дисперсионное уравнение для нахождения констант распространения β имеет вид

$$2 \frac{d}{dy} {}_2F_1(\beta + d, d, \beta + 1, -y_0)(1+y_0)y_0^2 + a \left[\chi y_0^2 + \left(\chi + d + \frac{\beta}{2} \right) y_0 + \frac{\beta}{2} \right] \times {}_2F_1(\beta + d, d, \beta + 1, -y_0) = 0. \quad (38)$$

Уравнение (38) можно решить только численно. При этом можно воспользоваться рекуррентной формулой для гипергеометрических функций [19]

$$\frac{d}{dx} {}_2F_1(A, B, C, x) = \frac{AB}{C} {}_2F_1(A+1, B+1, C+1, x). \quad (39)$$

5. Моделирование прохождения ТЕ-мод в ГС-волноводе

С помощью программы FullWAVE (RSoft), реализующей FDTD-метод разностного решения системы уравнений Максвелла, было промоделировано распространение в ГС-волноводе ТЕ-мод (9). ГС-волновод выбирался ограниченным (36). Параметры моделирования были следующие: $a = \lambda/2$, $\lambda = 1,55$ мкм, $n = 3,47$, ГС-волновод (36) ограничен размером $b = 1,5$ мкм. На рис. 5 показаны мгновенные распределения реальной части E -вектора ТЕ-волны, распространяющиеся в одном и том же ГС-волноводе (вертикальные и горизонтальные линии ограничивают волновод).

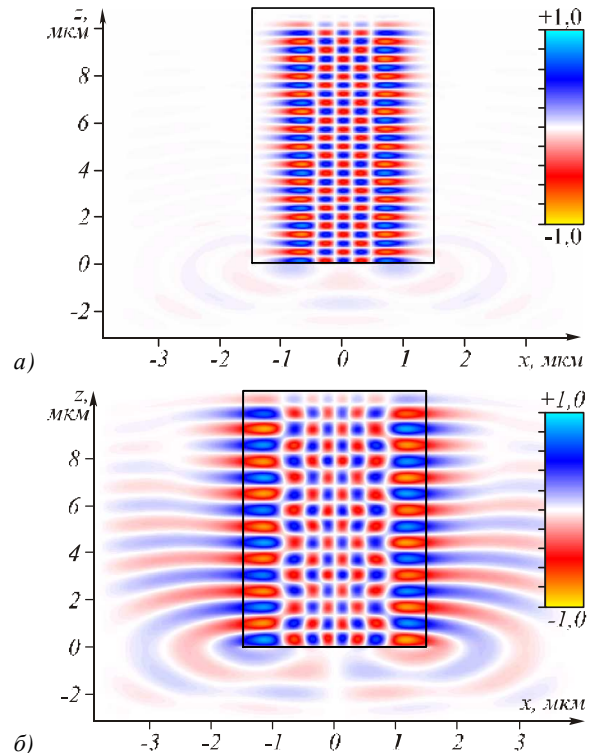


Рис. 5. Мгновенная картина реальной части амплитуды напряженности электрического поля, распространяющегося в ГС-волноводе (снизу вверх). На вход волновода при $z = 0$ подавались ТЕ-моды (9) с номерами $m = 4$ (а) и $m = 7$ (б)

На вход волновода ($z=0$) подавались ТЕ-моды (9) с номерами $m=4$ (рис. 5а) и $m=7$ (рис. 5б) и с параметром $a=\lambda/2$. Из рис. 5 видно, что начальные моды продолжают распространяться в волноводе почти без искажений. Из рис. 5б можно определить, что ширина локального максимума амплитуды по поперечному сечению равна $FWHM=0,065\lambda$.

На рис. 6 показана мгновенная картина реальной части напряженности электрического поля внутри такого же ГС-волновода, как на рис. 5, но на вход ($z=0$) подавалась ТЕ-мода (9) с номером $m=10$. Из (10) следует, что десятая мода $m=10$ (рис. 2б) – последняя мода, при которой константа распространения (10) еще положительная. Но на рис. 6 видно, что эта мода не распространяется в ограниченном ГС-волноводе. Или, точнее говоря, распространяется с потерями, то есть является вытекающей модой.

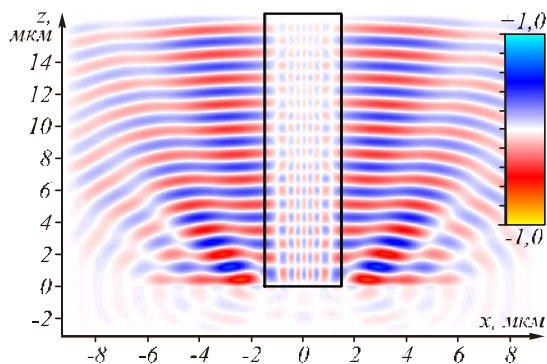


Рис. 6. Мгновенная картина реальной части амплитуды напряженности электрического поля, распространяющегося в ГС-волноводе (снизу вверх). На вход волновода при $z=0$ подавалась ТЕ-мода (9) с номером $m=10$

Результаты моделирования, демонстрирующие свойства периодического повторения (с периодом Тальбота (18)) светового поля с ТЕ-поляризацией в ГС-волноводе, показаны на рис. 7. На этом рисунке показаны мгновенные распределения реальной части амплитуды напряженности электрического поля, распространяющегося в ГС-волноводе (таким же, как на рис. 5). На вход волновода при $z=0$ подавались ТЕ-моды (9) с номерами $m=3$ (а) и $m=4$ (б), но ширина которых была уменьшена в 3 раза $a'=a/3$. Уменьшение ширины моды, согласованной с волноводом, приводит к тому, что она уже перестает быть модой и распространяется как линейная комбинация мод (15). Поэтому при распространении такого светового поля наблюдается периодическое повторение поперечного сечения интенсивности с периодом Тальбота $L=2\pi a = \pi\lambda = 4,87$ мкм (рис. 7). На рис. 7 видно, что картины мод при $m=3$ и $m=4$ имеют минимальный период, в два раза меньший, чем период Тальбота $L=4,87$ мкм. Это следует из того, что если в сумме (17) все m четны или нечетны, то период становится равен $L=\pi a$ вместо $2\pi a$.

6. Моделирование фокусировки света ГС-линзой

В этом разделе приводятся результаты моделирования субволновой фокусировки планарной ГС-линзой, которая представляет собой ограниченный по осям x и y кусок ГС-волновода с показателем преломления (1) при $a=2L'/\pi$, где L' – длина линзы.

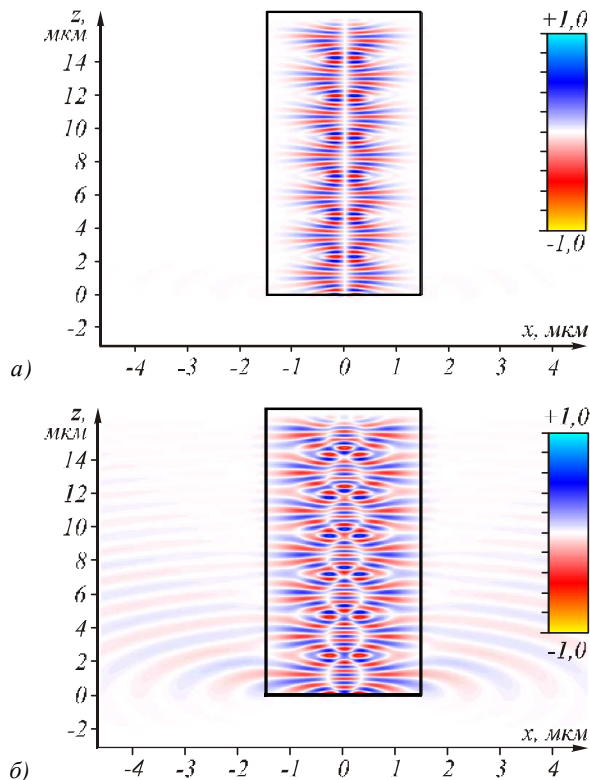


Рис. 7. Мгновенная картина реальной части амплитуды напряженности электрического поля, распространяющегося в ГС-волноводе (снизу вверх). На вход волновода при $z=0$ подавались ТЕ-моды (9) с номерами $m=3$ (а) и $m=4$ (б), но ширина которых была уменьшена в 3 раза: $a'=a/3$

Расчет производился с помощью программы на языке программирования C++ [4], реализующей двумерный FDTD-метод разностного решения системы уравнений Максвелла. Параметры моделирования: $n=3,1$ – показатель преломления на оси линзы, ширина линзы $2b=5$ мкм, длина линзы $L'=2,2$ мкм, длина волны $\lambda=1,55$ мкм, число отсчетов на длину волны по пространственным переменным – 400, падающее излучение – плоская ТЕ-поляризованная волна. На рис. 8 показаны усредненное по времени распределение интенсивности внутри ГС-линзы (а) и сечение этой интенсивности вдоль координаты x через фокус (б). При выбранных параметрах фокусное пятно на выходе ГС-линзы имеет минимальный размер $FWHM=0,131\lambda$. Заметим, что такое фокусное пятно немного меньше, чем скалярный дифракционный предел в двумерном случае в среде, равный $FWHM=0,44\lambda/n=0,14\lambda$.

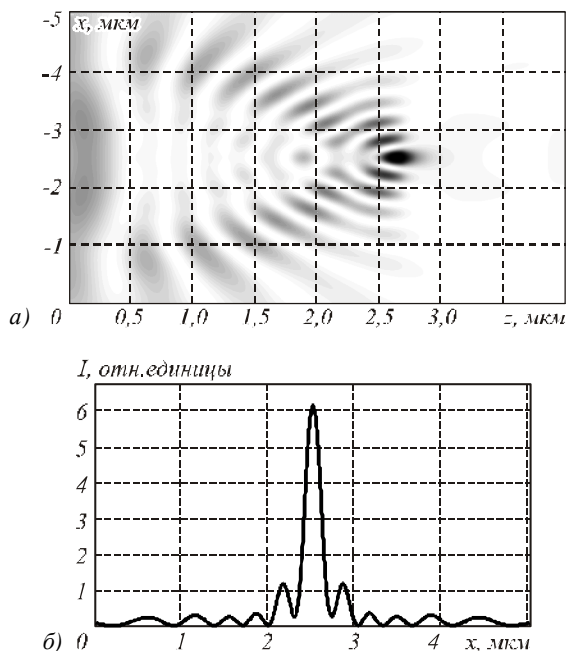


Рис. 8. Распределение усредненной по времени интенсивности (в полутонах) внутри ГС-линзы (а) и сечение этой интенсивности по оси x через фокус (б)

На рис. 9а приведен график зависимости ширины фокусного пятна от разбиения сетки отсчетов при расчете по методу FDTD в программе FullWave. Из него видно, что с увеличением разбиения N ширина фокуса почти перестает изменяться примерно со 100 отсчетов на длину волны, ширина фокуса при этом составляет $FWHM = 0,131\lambda$.

Для того чтобы показать, что приведенное значение ширины фокуса минимальное из возможных, ниже приводятся два графика, полученные в результате моделирования. На рис. 9б, в показаны графики зависимости ширины фокуса в ГС-линзе по полуспаду интенсивности (в длинах волн) от величины показателя преломления n на оси линзы (б) при ширине линзы $2b = 5$ мкм и длине $L' = 3$ мкм и от длины линзы L' (в) при $n = 3,1$ и ширине $2b = 5$ мкм. Из рис. 9 видно, что минимальная ширина фокусного пятна достигается при $n = 3,1$, $L' = 2,2$ мкм, $2b = 5$ мкм.

Заключение

В работе получены следующие результаты:

- в явном виде выписаны ТЕ- и ТМ- моды для планарного ГС-волновода, в том числе волновода с «пьедесталом» (уравнения (9), (26), (33)); данные моды являются частным случаем более общих мод, распространяющихся в волноводах Эпштейна;
- получено выражение для периода Тальбота (или фокусного расстояния) для ТЕ-мод в планарном ГС-волноводе (уравнение (18)), и показано, что для ТМ-мод не возникает периодичность и нет фокусировки в ГС-волноводе; показано также, что в ГС-волноводе с «пьедесталом» для ТЕ-мод эффект Тальбота и фокусировка также отсутствуют;

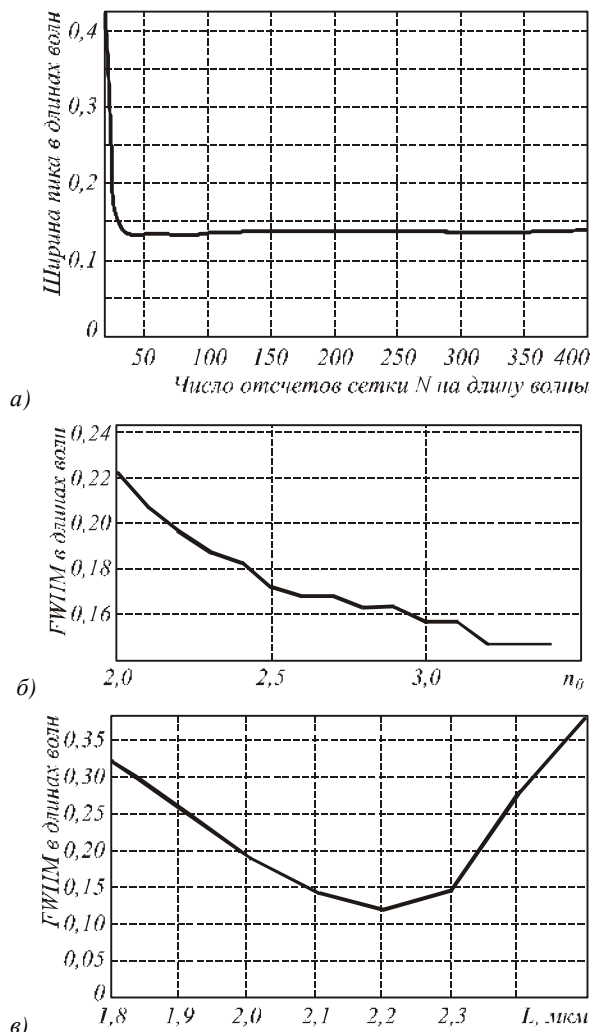


Рис. 9. Зависимость ширины фокуса по полуспаду интенсивности FWHM (в длинах волн) в ГС-линзе от разбиения сетки при FDTD-методе расчета (а), от показателя преломления на оптической оси (б) и от длины линзы (в)

- получены выражения для полной ширины по полуспаду интенсивности и нормированной интенсивности для основной ТЕ-моды в ГС-волноводе (уравнение (20)), и найдены параметры ГС-волновода, при которых ширина основной моды минимальна (рис. 3); минимальная ширина моды в кремниевом ГС-волноводе по полуспаду интенсивности равна $0,11$ от длины волны;
- с помощью моделирования программой Full-WAVE показано модовое распространение световых полей с начальными аналитически полученными амплитудами в ограниченных ГС-волноводах и периодическое повторение немодовых световых полей в волноводе с периодом Тальбота;
- с помощью моделирования также показано, что ГС-линза, являющаяся «куском» ГС-волновода, фокусирует плоскую ТЕ-волну в субволновое фокусное пятно шириной по полуспаду интенсивности $0,131$ от длины волны. Это меньше, чем дифракционный предел в двумерной среде $FWHM = 0,44\lambda/n = 0,147\lambda$ ($n = 3,1$).

Благодарности

Работа выполнена при поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (грант CRDF PG08-014-1), грантов Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-7414.2010.9) и молодого кандидата наук (МК-64571.2010.2).

Литература

1. **Wang, X.** Unrestricted superlensing in a triangular twodimensional photonic crystal / X. Wang, Z.F. Ren, K. Kempe // *Opt. Express.* – 2004. – Vol. 12. – P. 2919-2924.
2. **Wu, Q.** Graded negative index lens by photonic crystal / Q. Wu, J.M. Gibbons, W. Park // *Opt. Express.* – 2008. – Vol. 16, N 21. – P. 16941-16949.
3. **Minin, I.V.** Subwavelength diffractive photonic crystal lens / I.V. Minin, O.V. Minin, Y.R. Triandafilov, V.V. Kotlyar // *Prog. Electromag. Res. B.* – 2008. – Vol. 7. – P. 257-264.
4. **Triandafilov, Y.R.** A photonic crystal Mikaelian lens / I.V. Minin, O.V. Minin, Y.R. Triandafilov, V.V. Kotlyar // *Opt. Mem. Neur. Netw.* – 2008. – Vol. 17. – P. 1-7.
5. **Kotlyar, M.I.** Photonic crystal lens for coupling two waveguides / M.I. Kotlyar, Y.R. Triandafilov, A.A. Kovalev, V.A. Soifer, M.V. Kotlyar, L. O'Faolain // *Appl. Opt.* – 2009. – Vol. 48, N 19. – P. 3722-3730.
6. **Epstein, P.S.** Reflection of waves in an inhomogeneous absorbing medium / P.S. Epstein // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 1930. – Vol. 16. – P. 627-237.
7. **Микаэлян, А.Л.** Применение слоистой среды для фокусировки волн / А.Л. Микаэлян // *ДАН СССР.* – 1951. – Т. LXXXI. – С. 569-571.
8. **Rawson, E.G.** Analysis of refractive index distributions in cylindrical, gradient-index glass rods used as image relays / E.G. Rawson, D.R. Herriott, J. MacKenne // *Appl. Opt.* – 1970. – Vol. 3, N 3 – P. 753-759.
9. **Bao, C.** Gradient-index tapered hyperbolic second planar waveguide for focusing, collimation and beam-size control / C. Bao, C. Gomez-Reino, M.V. Perez // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1997. – Vol. 14, N 8. – P. 1754-1759.
10. **Linares, J.** Optical propagator in a graded-index medium with a hyperbolic secant refractive-index profile / J. Linares, C. Gomez-Reino // *Appl. Opt.* – 1994. – Vol. 33, N 16. – P. 3427-3431.
11. **Streifer, W.** Scalar analysis of radially inhomogeneous guiding media / W. Streifer, C.N. Kurz // *J. Opt. Soc. Am.* – 1967. – Vol. 57, N 6. – P. 779-786.
12. **Kornhauser, E.T.** Modal solution of a point source in a strongly focusing medium / E.T. Kornhauser, W. Streifer, C.N. Kurz // *Radio Sci.* – 1967. – Vol. 2. – P. 299-310.
13. **Silberberg, Y.** Modal treatment of an optical filter with a modified hyperbolic secant index distribution / Y. Silberberg, V. Levy // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1979. – Vol. 69, N 7. – P. 960-963.
14. **Duin, van C.A.** TM-modes in a planar optical waveguide with a graded index of the symmetric Epstein type / C.A. van Duin, J. Boersma, F.W. Sluijter // *Wave Motion.* – 1986. – Vol. 8, N 2 – P. 175-190.
15. **Hewak, D.W.** Solution deposited optical waveguide lens / D.W. Hewak, J.W.Y. Lit // *Appl. Opt.* – 1989. – Vol. 28, N 19. – P. 4190-4198.
16. **Rivas-Moscoco, J.M.** Focusing of light by zone plates in selfoc gradient-index lenses / J.M. Rivas-Moscoco, D. Nieto, C. Gomez-Reino, C.R. Fernandez-Pousa // *Opt. Lett.* – 2003. – Vol. 28, N 22. – P. 2180-2182.
17. **Rivas-Moscoco, J.M.** Hybrid refractive-diffractive-gradient-index superresolving focusing device / J.M. Rivaz-Moscoco, C.R. Fernandez-Pousa, C. Gomez-Reino // *Appl. Opt.* – 2008. – Vol. 47, N 22. – P. E68-E75.
18. **Адамс, М.** Введение в теорию оптических волноводов / М. Адамс. – М.: Мир, 1984.
19. *Справочник по специальным функциям* / под ред. М. Абрамовица, И. Стигана – М.: Наука, 1979.
20. **Brambilla, G.** Ultra-low-loss optical fiber nantapers / G. Brambilla, V. Finazzi, D.J. Richardson // *Opt. Express.* – 2004. – Vol. 12, N 10. – P. 2258-2263.
21. **Hartung, A.** Limits of light guidance in optical nanofibers / A. Hartung, S. Brueckner, H. Bartelt // *Opt. Express.* – 2010. – Vol. 18, N 4. – P. 3754-3761.
22. **Tong, L.** Subwavelength-diameter silica wires for low-loss optical wave guiding / L. Tong, A. Hartung, S. Brueckner, H. Bartelt // *Nature.* – 2003. – Vol. 426. – P. 816-818.

References

1. **Wang, X.** Unrestricted superlensing in a triangular twodimensional photonic crystal / X. Wang, Z.F. Ren, K. Kempe // *Opt. Express.* – 2004. – Vol. 12. – P. 2919-2924.
2. **Wu, Q.** Graded negative index lens by photonic crystal / Q. Wu, J.M. Gibbons, W. Park // *Opt. Express.* – 2008. – Vol. 16, N 21. – P. 16941-16949.
3. **Minin, I.V.** Subwavelength diffractive photonic crystal lens / I.V. Minin, O.V. Minin, Y.R. Triandafilov, V.V. Kotlyar // *Prog. Electromag. Res. B.* – 2008. – Vol. 7. – P. 257-264.
4. **Triandafilov, Y.R.** A photonic crystal Mikaelian lens / Y.R. Triandafilov, I.V. Minin, O.V. Minin, V.V. Kotlyar // *Opt. Mem. Neur. Netw.* – 2008. – Vol. 17. – P. 1-7.
5. **Kotlyar, M.I.** Photonic crystal lens for coupling two waveguides / M.I. Kotlyar, Y.R. Triandafilov, A.A. Kovalev, V.A. Soifer, M.V. Kotlyar, L. O'Faolain // *Appl. Opt.* – 2009. – Vol. 48, N 19. – P. 3722-3730.
6. **Epstein, P.S.** Reflection of waves in an inhomogeneous absorbing medium / P.S. Epstein // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 1930. – Vol. 16. – P. 627-237.
7. **Mikaelian, A.L.** Application of stratified medium for waves focusing / A.L. Mikaelian // *Doklady Akademii Nauk SSSR.* – 1951. – Vol. 81. – P. 569–571. – (in Russian).
8. **Rawson, E.G.** Analysis of refractive index distributions in cylindrical, gradient-index glass rods used as image relays / E.G. Rawson, D.R. Herriott, J. MacKenne // *Appl. Opt.* – 1970. – Vol. 3, N 3 – P. 753-759.
9. **Bao, C.** Gradient-index tapered hyperbolic second planar waveguide for focusing, collimation and beam-size control / C. Bao, C. Gomez-Reino, M.V. Perez // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1997. – Vol. 14, N 8. – P. 1754-1759.
10. **Linares, J.** Optical propagator in a graded-index medium with a hyperbolic secant refractive-index profile / J. Linares, C. Gomez-Reino // *Appl. Opt.* – 1994. – Vol. 33, N 16. – P. 3427-3431.
11. **Streifer, W.** Scalar analysis of radially inhomogeneous guiding media / W. Streifer, C.N. Kurz // *J. Opt. Soc. Am.* – 1967. – Vol. 57, N 6. – P. 779-786.
12. **Kornhauser, E.T.** Modal solution of a point source in a strongly focusing medium / E.T. Kornhauser, W. Streifer, C.N. Kurz // *Radio Sci.* – 1967. – Vol. 2. – P. 299-310.
13. **Silberberg, Y.** Modal treatment of an optical filter with a modified hyperbolic secant index distribution / Y. Silberberg, V. Levy // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1979. – Vol. 69, N 7. – P. 960-963.

14. **Duin, van C.A.** TM-modes in a planar optical waveguide with a graded index of the symmetric Epstein type / C.A. van Duin, J. Boersma, F.W. Sluijter // *Wave Motion*. – 1986. – Vol. 8, N 2 – P. 175-190.
15. **Hewak, D.W.** Solution deposited optical waveguide lens / D.W. Hewak, J.W.Y. Lit // *Appl. Opt.* – 1989. – Vol. 28, N 19. – P. 4190-4198.
16. **Rivas-Moscoso, J.M.** Focusing of light by zone plates in selfoc gradient-index lenses / J.M. Rivas-Moscoso, D. Nieto, C. Gomez-Reino, C.R. Fernandez-Pousa // *Opt. Lett.* – 2003. – Vol. 28, N 22. – P. 2180-2182.
17. **Rivas-Moscoso, J.M.** Hybrid refractive-diffractive-gradient-index superresolving focusing device / J.M. Rivaz-Moscoso, C.R. Fernandez-Pousa, C. Gomez-Reino // *Appl. Opt.* – 2008. – Vol. 47, N 22. – P. E68-E75.
18. **Adams, M.** An Introduction to Optical Waveguides – J. Wiley and Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, 1981. – (in Russian).
19. *Handbook of Mathematical Functions* / ed. M. Abramowitz, I.A. Stegun. – National Bureau of Standards, Washington, DC, 1964. – 1044p.
20. **Brambilla, G.** Ultra-low-loss optical fiber nantapers / G. Brambilla, V. Finazzi, D.J. Richardson // *Opt. Express*. – 2004. – Vol. 12, N 10. – P. 2258-2263.
21. **Hartung, A.** Limits of light guidance in optical nanofibers / A. Hartung, S. Brueckner, H. Bartelt // *Opt. Express*. – 2010. – Vol. 18, N 4. – P. 3754-3761.
22. **Tong, L.** Subwavelength-diameter silica wires for low-loss optical wave guiding / L. Tong, A. Hartung, S. Brueckner, H. Bartelt // *Nature*. – 2003. – Vol. 426. – P. 816-818.

MODES OF PLANAR GRADIENT-INDEX HYPERBOLIC SECANT WAVEGUIDE

V. V. Kotlyar^{1,2}, A. A. Kovalev^{1,2}, Ya. R. Triandafilov^{1,2}, A. G. Nalimov^{1,2}

¹ S.P. Korolyov Samara State Aerospace University,

² Image Processing Systems Institute of the RAS

Abstract

We obtained analytical expressions for TE and TM modes of the planar hyperbolic secant (HS) waveguide. These modes are partial case of the more general modes propagating in the Epstein's waveguides. Expression for the Talbot period (or focal distance) has been obtained for TE-modes in the planar HS-waveguide and we show that for TM-modes there is no analogous periodicity and focusing in HS-waveguide. We obtained expressions for full width at half-maximum of intensity and normalized intensity for the fundamental TE-mode in the HS-waveguide and waveguide parameters have been found for which the width of the fundamental mode is minimal. In silicon HS-waveguide this minimal mode has width at half-maximum 0.11 of wavelength. By using Full-WAVE simulation tool we show modal propagation of light fields with analytically obtained amplitudes in bounded HS-waveguides and we proved periodic reconstruction of non-modal light fields with the Talbot period. We also show by simulation that HS-lens, obtained by truncation of the HS-waveguide, focuses TE-polarized plane wave into subwavelength focal spot with half-maximum intensity 0.132 of wavelength.

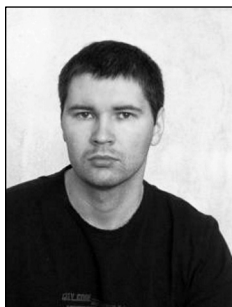
Key words: gradient-index planar waveguide, hyperbolic secant waveguide, TE and TM modes, Epstein's waveguide, Talbot period, mode width, hyperbolic secant lens, subwavelength focusing.

Сведения об авторах



Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН и, по совместительству, профессор кафедры технической кибернетики Самарского государственного аэрокосмического университета (СГАУ). В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств.

Victor Victorovich Kotlyar is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute (Samara) of the Russian Academy of Sciences and professor of Computer Science Department at Samara State Aerospace University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in physics and mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE and OSA member. He is co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, optical vortices.



Ковалев Алексей Андреевич, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева по специальности «Прикладная математика». Кандидат физико-математических наук (2005 год), работает научным сотрудником лаборатории лазерных измерений Института систем обработки изображений РАН (ИСОИ РАН), является докторантом кафедры технической кибернетики СГАУ. Ковалев А.А. – специалист в области дифракционной оптики и нанофотоники. В списке научных работ 50 статей, e-mail: alanko@smr.ru. Область научных интересов: математическая теория дифракции, сингулярная оптика, фотонно-кристаллические устройства.

Kovalev Alexey Andreevich (b. 1979), graduated (2002) from the S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Mathematics. He received his Candidate in Physics & Maths degree (2002). He is a researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences (IPSI RAS), holding a part-time position of assistant at SSAU's Technical Cybernetics sub-department. He is a specialist in such areas as diffractive optics and nanophotonics. He is co-author of 50 scientific papers, e-mail: alanko@smr.ru. Research interests are mathematical diffraction theory, singular optics, and photonic crystal devices.



Триандафилов Янис Русланович, 1985 года рождения, аспирант Самарского государственного аэрокосмического университета. В 2009 году получил степень магистра по направлению «Прикладная математика и физика» в Самарском государственном аэрокосмическом университете (СГАУ). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 10 научных трудов.

Yanis Ruslanovich Triandafilov (b. 1985) is postgraduated student of Samara State Aerospace University. He received his MS degree in physics and mathematics in Samara State Aerospace University (2009). He is a SPIE member. He is co-author of 10 scientific papers. His current interests are diffractive optics, nanophotonics.



Налимов Антон Геннадьевич, 1980 года рождения, окончил Самарский государственный аэрокосмический университет в феврале 2003 года по специальности «Физика». Поступил в очную аспирантуру СГАУ по специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» в 2003 году, закончил ее по специальности 01.04.05 «Оптика» в 2006 году. Работает на кафедре Технической кибернетики СГАУ в должности ассистента, в Институте систем обработки изображений РАН в должности научного сотрудника. Кандидат физико-математических наук, соавтор 39 работ.

Anton Gennadyevich Nalimov (b. 1980) finished Samara State Aerospace University in February, 2003. Entered in postgraduate study in 2003 on speciality 05.13.18 "Mathematical modeling and program complexes", finished it in 2006 with speciality 01.04.05 "Optics". Nalimov A.G. works on Technical Cybernetics department in SSAU as an assistant, works as a scientist in Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences. Candidate in Physics and Mathematics, co-author of 39 papers.

Поступила в редакцию 6 апреля 2010 г.