

ДИАМЕТР ФОКУСНОГО ПЯТНА ДЛЯ НЕГАУССОВЫХ ПУЧКОВ С КОНЕЧНОЙ ЭНЕРГИЕЙ*Котляр В.В., Налимов А.Г., Стафеев С.С.**Институт систем обработки изображений РАН,
Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)***Аннотация**

Аналитически и с помощью моделирования показано, что радиально-симметричные негауссовы параксиальные пучки с конечной энергией позволяют в несколько раз уменьшить диаметр фокусного пятна по сравнению с диаметром фокусного пятна, сформированного соответствующим Гауссовым пучком. Кроме того, рассмотренные негауссовы пучки имеют соотношение неопределённостей, взятое по полуспаду интенсивности пучков, в 4 раза меньше, чем для Гауссова пучка. Моделирование острой фокусировки таких негауссовых пучков с линейной поляризацией также показало возможность уменьшения в 2 раза диаметра фокусного пятна по сравнению с диаметром фокусного пятна соответствующего Гауссова пучка.

Ключевые слова: фокусировка Гауссова пучка, амплитудное распределение в виде «колокола», пучки с конечной энергией.

Введение

В настоящее время актуальным является уменьшение диаметра фокусного пятна без изменения параметров фокусирующей оптической системы. Например, с помощью использования бинарных и полутонных ДОО [1 - 5], дополняющих фокусирующий объектив. Или с помощью амплитудных масок [6, 7], или просто с использованием кольцевой диафрагмы [8]. Все эти работы посвящены непараксиальной (острой) фокусировке света с радиальной поляризацией. Получить явные аналитические соотношения в этом случае почти не удаётся.

С другой стороны, известны радиально-симметричные амплитудные негауссовы распределения в виде «колокола» [9, 10], которые можно рассматривать как начальные амплитуды параксиальных или непараксиальных световых пучков с плоским волновым фронтом и конечной энергией. Такие световые пучки «спадают на бесконечности медленнее», чем Гауссов пучок, и поэтому в Фурье-плоскости формируется пространственный спектр (фокусное пятно), эффективная ширина которого (диаметр) должна быть меньше, чем диаметр фокуса Гауссова пучка (при прочих равных условиях).

В справочниках [9, 10] имеются аналитические формулы, описывающие Фурье-преобразования для этих пучков, из которых следует, что некоторые из них обладают свойством Фурье-инвариантности. Хотя аналитических формул, описывающих распространение этих пучков в зоне Френеля, найти не удалось.

В данной работе аналитически и с помощью моделирования показано, что радиально-симметричные негауссовы параксиальные пучки с конечной энергией позволяют в несколько раз уменьшить диаметр фокусного пятна по сравнению с диаметром фокусного пятна, сформированного соответствующим Гауссовым пучком. Кроме того, рассмотренные негауссовы пучки имеют соотношение неопределённостей, взятое по полуспаду интенсивно-

сти пучков, в 4 раза меньше, чем для Гауссова пучка. Моделирование острой фокусировки таких негауссовых пучков с линейной поляризацией также показало возможность уменьшения в 2 раза диаметра фокусного пятна по сравнению с диаметром фокусного пятна соответствующего Гауссова пучка. Заметим, что все рассмотренные фокусные пятна почти не имеют боковых лепестков.

1. Амплитудное распределение в виде «колокола»

Рассмотрим радиально-симметричное скалярное световое поле в начальной плоскости $z=0$ (z – оптическая ось) с комплексной амплитудой в форме «колокола»:

$$E_1(r) = \left[1 + \left(\frac{r}{w} \right)^2 \right]^{-\gamma}, \quad (1)$$

где w – эффективный радиус пучка, r – радиальная координата. Функция (1) стремится на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) к нулю, но медленнее, чем Гауссова функция. Энергия пучка (1) имеет конечное значение и равна

$$W_1 = 2\pi \int_0^{\infty} |E_1(r)|^2 r dr = \frac{\pi w^2}{(2\gamma - 1)} \quad (2)$$

при $\gamma > 1/2$. Значение амплитуды в центре плоскости Фурье-спектра будет конечным при $\gamma > 1$ и равно:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1(\rho=0) &= \frac{-ik}{f} \int_0^{\infty} \left[1 + \left(\frac{r}{w} \right)^2 \right]^{-\gamma} r dr = \\ &= \frac{-ikw^2}{2f(\gamma - 1)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где k – волновое число света с длиной волны λ , f – фокусное расстояние параксиальной сферической линзы. В фокусе сферической линзы в параксиальном приближении сформируется поле с комплексной амплитудой [10]:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_1(\rho) &= \frac{-ikw^{2\gamma}}{f} \int_0^\infty \frac{J_0(kr\rho/f)}{(r^2+w^2)^\gamma} r dr = \\ &= \frac{-ikw^2}{f\Gamma(\gamma)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\gamma-1} K_{-\gamma+1}(x),\end{aligned}\quad (4)$$

где $x = \frac{k\rho r}{f}$, $J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $K_1(x)$ – Функция Макдональда или модифицированная функция Бесселя третьего рода ν -го порядка, $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Чтобы получить наглядные результаты, выберем минимальное значение γ , при котором функция Макдональда выражается в элементарных функциях ($\gamma=3/2$). Тогда вместо (4) получим выражение для комплексной амплитуды поля в фокальной плоскости линзы:

$$\tilde{E}_1(\rho) = \frac{-ikw^2}{f} \exp\left(-\frac{\rho}{\tilde{w}}\right), \quad (5)$$

где $\tilde{w} = \frac{\lambda f}{2\pi w}$ – эффективный радиус поля в Фурье-плоскости. При получении (5) воспользовались известными выражениями [10]:

$$K_{\pm 1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \exp(-x) \text{ и } \Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Найдём диаметр фокусного пятна по полуспаду интенсивности из уравнения:

$$\tilde{I}_1(\rho) = |\tilde{E}_1(\rho)|^2 = \frac{1}{2} \tilde{I}_1(0). \quad (6)$$

Тогда получим:

$$FWHM_1 = \left(\frac{\ln 2}{2\pi}\right) \frac{\lambda f}{w} \approx 0,11 \frac{\lambda f}{w}, \quad (7)$$

где FWHM – ширина фокусного пятна по полуспаду интенсивности (full width of half maximum). Энергия такого пучка в Фурье-плоскости будет равна (см. (2)):

$$W_{10} = \frac{\pi w^2}{2}. \quad (8)$$

Сравним выражения (7) и (8) с аналогичными выражениями для Гауссова пучка с комплексной амплитудой в перетяжке при $z=0$:

$$E_g(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{w_g^2}\right), \quad (9)$$

где w_g – радиус Гауссова пучка. В фокальной плоскости комплексная амплитуда поля пропорциональна Гауссовой функции:

$$\tilde{E}_g(\rho) = \frac{-ikw^2}{2f} \exp\left(-\frac{\rho^2}{\tilde{w}_g^2}\right), \quad (10)$$

где $\tilde{w}_g = (\lambda f)/(\pi w_g)$ – радиус Гауссова пучка в Фурье-плоскости. Энергия Гауссова пучка равна:

$$W_g = 2\pi \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2r^2}{w_g^2}\right) r dr = \frac{\pi w_g^2}{2}. \quad (11)$$

Диаметр фокусного пятна для Гауссова пучка по полуспаду интенсивности равен:

$$FWHM_g = \left(\frac{2}{\pi} \sqrt{\ln 2}\right) \frac{\lambda f}{w_g} \approx 0,38 \frac{\lambda f}{w_g}. \quad (12)$$

Из сравнения (8) и (11) видно, что энергии обоих пучков будут одинаковыми при равенстве их эффективных радиусов ($w=w_g$). При этом диаметр фокусного пятна Гауссова пучка (12) будет в 3,45 раза больше, чем диаметр фокусного пятна (7) для пучка (1). Из (5) видно, что при экспоненциальном уменьшении интенсивности фокусного пятна в центре пятна производная терпит разрыв, то есть интенсивность в максимуме имеет «острый носик». Это происходит из-за бесконечной апертуры пучка (1). На практике пучки имеют ограниченную апертуру. При этом только часть световой энергии пучка (1), прошедшая через круглую апертуру с радиусом R , ограничивающую сферическую линзу, попадёт в фокальную плоскость. Эта энергия будет равна:

$$\begin{aligned}W_{1R} &= 2\pi \int_0^R \left[1 + \left(\frac{r}{w}\right)^2\right]^{-3} r dr = \\ &= W_{10} \frac{R^2(2w^2 + R^2)}{(w^2 + R^2)^2},\end{aligned}\quad (13)$$

где W_{10} – энергия всего (неограниченного) пучка из выражения (8). Для сравнения приведём выражение для энергии Гауссова пучка, ограниченного круглой диафрагмой с радиусом R :

$$W_{gR} = W_{g0} \left(1 - \exp\left[-2\left(R/w_g\right)^2\right]\right), \quad (14)$$

где $W_{g0} = W_g = \pi w_g^2/2$ – энергия всего Гауссова пучка, совпадающая с (11).

На рис. 1 показаны радиальные сечения интенсивности Гауссова пучка (1а) и пучка (1) при $\gamma=3/2$ (1б) с одинаковыми радиусами $w=w_g=30$ мкм, ограниченных диафрагмой радиусом $R=3w$.

Из рис. 1 видно, что Гауссов пучок почти полностью проходит через диафрагму с радиусом $R=90$ мкм, а пучок (1) «спадает медленнее», и поэтому небольшая часть энергии задерживается диафрагмой. Точнее, из формул (13) и (14) следует, что диафрагма с радиусом $R=3w$ пропускает 99% энергии пучка (1) и 99,99% энергии Гауссова пучка. Несмотря на то, что всего 1% энергии пучка (1) не проходит через диафрагму, размер фокусного пятна изменяется существенно.

На рис. 2 показаны рассчитанные с помощью преобразования Фурье радиальные сечения интенсивности фокусных пятен, полученных для Гауссова пучка (9) (2а) и для пучка (1) при $\gamma=3/2$

(2б). Параметры расчёта: длина волны $\lambda = 633$ нм, фокусное расстояние сферической линзы $f = 300$ мкм, радиусы пучков одинаковы и равны $w = w_g = 30$ мкм, радиус диафрагмы $R = 3w$, число отсчётов в исходной плоскости и в плоскости фокуса равно 4500×4500 .

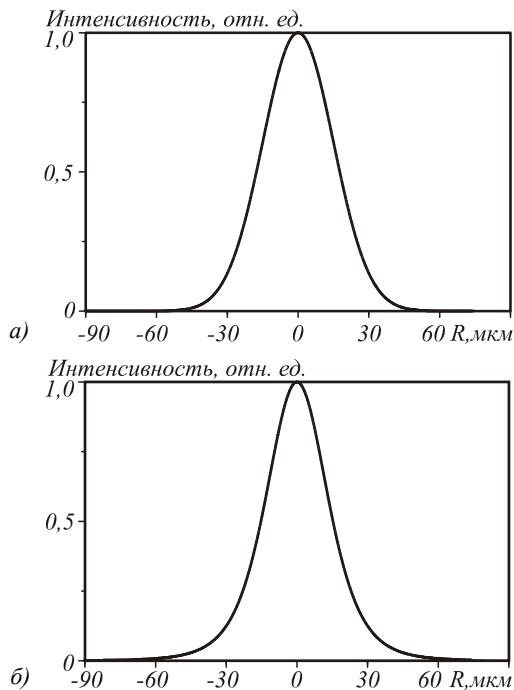


Рис. 1. Радиальные распределения интенсивности Гауссова пучка (9) (а) и пучка (1) при $\gamma = 3/2$ (б) с одинаковыми радиусами $w = w_g = 30$ мкм

При этом величина одного отсчёта равна 40 нм. Диаметры рассчитанных фокусных пятен на рис. 2 равны $\text{FWHM}_g = 3,74\lambda$ и $\text{FWHM}_1 = 2,56\lambda$. То есть из-за слабого ограничения диафрагмой пучка (1) диаметр его фокусного пятна увеличился и стал меньше диаметра Гауссова пучка в 1,46 раза, хотя по теории диаметр фокусного пятна пучка (1) должен быть меньше диаметра фокусного пятна Гауссова пучка в 3,45 раза. То, что именно ограничение апертурой пучка (1) приводит к увеличению диаметра фокусного пятна, можно подтвердить, увеличив размер апертуры. Расчёт показал, что при $R = 5w = 150$ мкм диаметр фокусного пятна для пучка (1) уменьшается и становится равным $\text{FWHM}_1 = 1,92\lambda$. При этом отношения диаметров фокусных пятен увеличивается до 1,95. Диафрагма с радиусом $R = 5w$ пропускает 99,85% от полной энергии пучка (1). Таким образом, даже такая малая часть световой энергии, которая не прошла через диафрагму (0,15%), оказывает существенное влияние на величину диаметра фокусного пятна пучка (1): диаметр фокусного пятна остаётся в 1,77 раз больше, чем диаметр фокусного пятна для неограниченного пучка (1).

Интенсивность в центре фокусного пятна для пучка (1) при $\gamma = 3/2$ равна

$$I_{1R}(0) = \left(\frac{kw^2}{f}\right)^2 \frac{(\sqrt{R^2 + w^2} - w)^2}{R^2 + w^2}. \tag{15}$$

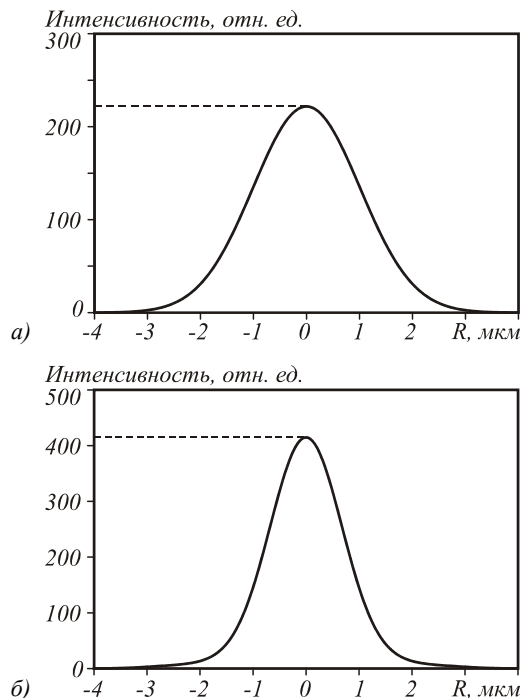


Рис. 2. Радиальные распределения интенсивности в фокусе парааксиальной сферической линзы с фокусным расстоянием $f = 300$ мкм (длина волны $\lambda = 633$ нм) для Гауссова пучка (а) и пучка (1) (б)

При $R = 3w$ получим, что

$$I_{1R}(0) = 1,87 \left(\frac{kw^2}{2f}\right)^2 = 1,87 \cdot I_{g0}(0), \tag{16}$$

где $I_{g0}(0)$ – интенсивность в центре фокуса Гауссова пучка, полученная из (10). Из этой формулы, также как и из рис. 2а, 2б, следует, что максимальная интенсивность в фокусном пятне Гауссова пучка почти в 2 раза меньше, чем максимальная интенсивность пучка (1) при $\gamma = 3/2$ и при $R = 3w$.

2. Фурье-инвариантное амплитудное распределение в виде «колокола»

Рассмотрим ещё одно аналогичное амплитудное радиально-симметричное поле, которое также, как поле (1), имеет конечную энергию, «спадает на бесконечности» медленнее Гауссова пучка (9) и немного медленнее пучка (1) при $\gamma = 3/2$. Комплексная амплитуда такого «колокола-2» имеет вид:

$$E_2(r) = \left[1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \times \exp\left[-\frac{kr_0\rho_0}{f} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2} - 1\right)\right], \tag{17}$$

где r_0 и ρ_0 – параметры, характеризующие эффективные размеры пучка в исходной плоскости и Фурье-плоскости. Максимальная интенсивность пучка (17) в центре равна 1. У пучка (17) комплексная амплитуда, как у Гауссова пучка, восстанавливается в Фурье-плоскости. То есть пучок (17) – Фурье-инвариантный. На основе справочного интеграла [10] можно найти комплексную амплитуду для пучка (17) в фокальной плоскости параксиальной сферической линзы:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_2(\rho) &= \frac{-ikr_0}{f} \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{k\rho_0}{f}\sqrt{r^2+r_0^2}\right)}{\sqrt{r^2+r_0^2}} \times \\ &\times \exp\left(\frac{kr_0\rho_0}{f}\right) J_0\left(\frac{kr\rho}{f}\right) r dr = \\ &= (-ir_0) \frac{\exp\left(-\frac{kr_0}{f}\sqrt{\rho^2+\rho_0^2}\right) \exp\left(\frac{kr_0\rho_0}{f}\right)}{\sqrt{\rho^2+\rho_0^2}}. \end{aligned} \tag{18}$$

Энергия пучка (17) конечна, так как имеет место неравенство:

$$\begin{aligned} W_2 &= 2\pi\rho_0^2 \int_0^\infty \left| \frac{\exp\left(-\frac{k\rho_0}{f}\sqrt{r^2+r_0^2}\right)}{\sqrt{r^2+r_0^2}} \right|^2 r dr \leq \\ &\leq 2\pi\rho_0^2 \int_0^\infty \left| \frac{\exp\left(-\frac{k\rho_0}{f}\sqrt{r^2+r_0^2}\right)}{\sqrt{r^2+r_0^2}} \right|^2 r dr = \\ &= 2\pi \left(\frac{fr_0}{k\rho_0}\right)^2 \exp\left(-\frac{2kr_0\rho_0}{f}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Неравенство (19) основано на простом свойстве положительных чисел, для которых квадрат суммы больше суммы квадратов этих чисел.

Из (18) можно приближенно найти диаметр фокусного пятна по полуспаду интенсивности:

$$FWHM_2 \approx 0,12 \frac{\lambda f}{r_0} \tag{20}$$

при условии, что $\rho_0 = (\lambda f)/(4\pi r_0)$. На рис. 3 показаны радиальные распределения интенсивности для пучка (17) в начальной плоскости $z=0$ (3а) и в фокальной плоскости параксиальной сферической линзы, рассчитанное с помощью преобразования Фурье (3б).

Параметр пучка $r_0=20$ мкм, радиус диафрагмы $R=90$ мкм, длина волны $\lambda=633$ нм и фокусное расстояние линзы $f=300$ мкм. Остальные параметры такие же, как и для рис. 2. При таком радиусе пучка ($r_0=20$ мкм) его энергия почти равна энергии Гауссова пучка с радиусом $w_g=30$ мкм. Диаметр фокусного пятна на рис. 3б по полуспаду интенсивности

равен $FWHM_2=2,47\lambda$. Это немного меньше, чем для пучка (1) при прочих равных параметрах ($FWHM_1=2,56$). Из сравнения рис. 1б и рис. 3а видно, что, хотя оба пучка (1) при $\gamma=3/2$ и (17) имеют одинаковую энергию, функция интенсивности пучка (17) «спадает немного медленнее», чем интенсивность пучка (1). Этим и объясняется, что диаметр фокусного пятна пучка (17) на рис. 3б немного меньше (на 3%), чем диаметр фокусного пятна (1) на рис. 2б. Интенсивность в центре фокусного пятна на рис. 3б равна

$$\begin{aligned} I_{2R}(0) &= \left(\frac{r_0}{\rho_0}\right)^2 \times \\ &\times \left[1 - \exp\left(-\frac{k\rho_0}{f}\left(\sqrt{R^2+r_0^2}-r_0\right)\right)\right] \end{aligned} \tag{21}$$

при условии, что $r_0=2w/3$, $R=3w$, $\rho_0 = (\lambda f)/(4\pi r_0)$, это выражение примет вид:

$$I_{2R}(0) = 2,2 \left(\frac{kw^2}{2f}\right)^2 = 2,2 I_{g0}. \tag{22}$$

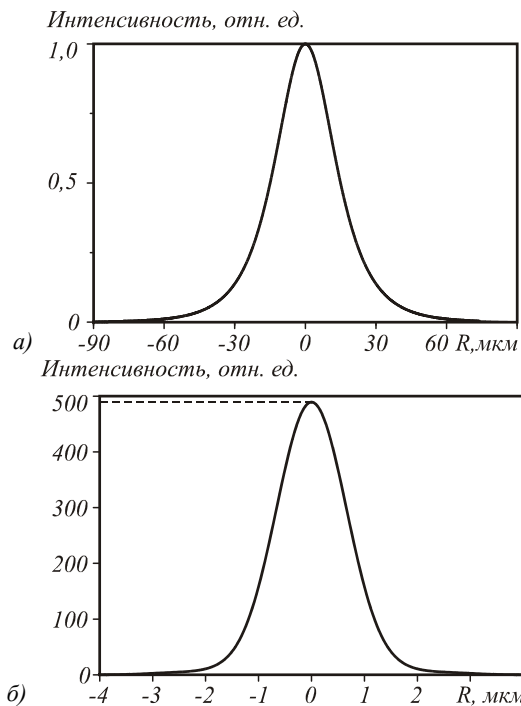


Рис. 3. Радиальные сечения интенсивности для пучка (17) в начальной плоскости (а) и Фурье-плоскости (б)

Из сравнения рис. 2а и 3б также следует, что максимальная интенсивность фокусного пятна пучка (17) почти в 2,2 раза больше, чем максимальная интенсивность фокусного пятна Гауссова пучка (9). Таким образом, хотя оба пучка (1) при $\gamma=3/2$ и (17), обладающие одинаковой энергией, формируют фокусные пятна с почти одинаковыми диаметрами, но пучок (17) имеет максимальную интенсивность в фокусе в 1,2 раза большую, чем у пучка (1), и обладает свойством Фурье-инвариантности, что делает его более привлекательным.

3. Формирование амплитудного распределения в виде «колокола»

Сформировать амплитудное распределение (1) при $\gamma = 3/2$ можно из Гауссова пучка с радиусом w_g . Если такой пучок расширить в 2 раза и в перетяжке поместить амплитудную маску с пропусканием

$$T(r) = \exp\left(\frac{r}{2w_g}\right)^2 \left(1 + \frac{r^2}{w_g^2}\right)^{-3/2}, \quad (23)$$

то сразу после маски сформируется световое поле с амплитудой

$$E_3(r) = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{r}{w_g}\right)^2 \right]^{-3/2}, \quad (24)$$

энергия которого будет составлять 25% от энергии исходного Гауссова пучка (9) с радиусом w_g . Пропускание маски (23) меньше 1 в диапазоне приблизительно $0 \leq r < 4,184w_g$, как показано на рис. 4.

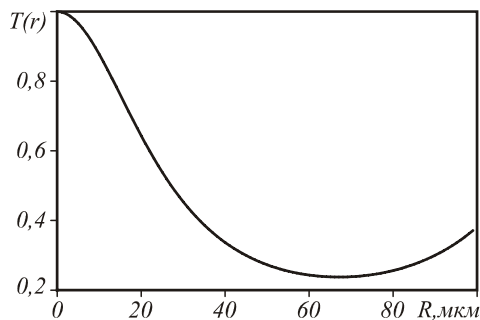


Рис. 4. Функция пропускания амплитудной маски (23) при $w_g = 30$ мкм

Тогда с помощью парааксиальной сферической линзы пучок (24) можно сфокусировать в пятно с диаметром по полуспаду интенсивности в 1,46 раз меньше, чем диаметр фокусного пятна Гауссова пучка (9) с радиусом w_g . Заметим, что хотя при этом энергия фокусного пятна будет в 4 раза меньше, чем энергия исходного Гауссова пучка, но максимальная интенсивность в фокусе будет всего в 2 раза меньше, чем максимальная интенсивность в фокусе исходного Гауссова пучка, полученного с помощью той же линзы. Заметим, что бесселев пучок также позволяет уменьшить дифракционный предел с $0,51\lambda$ до $0,35\lambda$ в 1,46 раза, но с более низкой эффективностью. Так как для формирования бесселева пучка требуется узкая кольцевая диафрагма.

4. Соотношение неопределённостей для негауссова пучка

Известно [11], что Гауссов пучок минимизирует соотношение неопределённостей, если эффективный радиус исходного пучка и радиус фокусного пятна определять как вторые моменты интенсивности. Если же определять радиусы пучков по полуспаду интенсивности, то пучок (1) при $\gamma = 3/2$ будет иметь соотношение неопределённостей в 4 раза меньшее, чем Гауссов пучок. Действительно, из (1)

можно найти выражение для диаметра пучка по полуспаду интенсивности в виде

$$\text{FWHM}_1(r) = 2w^2 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1}. \quad (25)$$

Диаметры Гауссовых пучков на входе и в Фурье-плоскости нам уже известны:

$$\text{FWHM}_g(r) = 2w \sqrt{\frac{\ln 2}{2}}, \quad (26)$$

$$\text{FWHM}_g(\rho) = \frac{2\lambda f}{\pi w} \sqrt{\frac{\ln 2}{2}}.$$

Также из (7) известен диаметр пучка (1) в Фурье-плоскости:

$$\text{FWHM}_1(\rho) = \frac{\lambda f}{w} \left(\frac{\ln 2}{2\pi} \right). \quad (27)$$

Тогда соотношения неопределённостей для этих двух пучков, определённые как произведения диаметров входного и фокусного пятен, будут равны:

$$\text{FWHM}_1(r) \cdot \text{FWHM}_1(\rho) = 0,11\lambda f, \quad (28)$$

$$\text{FWHM}_g(r) \cdot \text{FWHM}_g(\rho) = 0,44\lambda f. \quad (29)$$

5. Острая фокусировка линейно-поляризованных негауссовых пучков

Рассмотрим в этом разделе острую (непараксиальную) фокусировку линейно-поляризованных световых полей с амплитудным Гауссовым распределением (9) и распределением (1). Расчёт проводился с помощью хорошо известных формул Ричардса - Вольфа [12] для апланатического объектива с числовой апертурой $NA = 0,99$. Заметим, что в [13] показано, что приближенные формулы Ричардса - Вольфа дают адекватные результаты (с ошибкой не хуже 6%) при фокусном расстоянии большем 4λ . Пусть радиус круглого зрачка объектива равен $R = 100\lambda$, радиусы пучков (1) и (9) равны $w = w_g = 30\lambda$. В табл. 1 приведены значения диаметров эллиптических фокусных пятен по обеим осям x и y (электрический вектор волны направлен вдоль оси x) в длинах волн и значения максимальной интенсивности в центре фокусных пятен в относительных единицах для Гауссова пучка (последняя строка) и для пучка (1) с $\gamma = 1 + \alpha$ при $\alpha = 0,1; 0,2; 0,5$.

Таблица 1. Размеры фокусного пятна при фокусировке линзой с $NA = 0,99$ и $R = 100\lambda$

α	FWHM_x, λ	FWHM_y, λ	$I(0)$
0,1	0,64	0,82	78,96
0,2	0,67	0,84	62,24
0,5	0,76	0,90	32,45
Гаусс	1,24	1,31	15,61

Из табл. 1 видно, что фокусное пятно с минимальным диаметром $\text{FWHM}_x = 0,64\lambda$ и максимальной интенсивностью в центре $I(0) = 78,96$ даёт световой пучок (1) с минимальным параметром $\gamma = 1,1$. Этот минимальный диаметр фокусного пятна ($0,64\lambda$) почти в 2 раза меньше, чем диаметр фокусного пятна соответствующего Гауссова пучка ($1,24\lambda$).

На рис. 5 показаны радиальные распределения амплитуды пучка (1) ($w=30\lambda$) при $\alpha=0,1$ (кривая 1); $\alpha=0,2$ (кривая 2); $\alpha=0,5$ (кривая 3). Из рис. 5 видно, что чем меньше параметр α , тем «медленнее спадает» амплитуда с ростом r . При этом все пучки на рис. 5 имеют конечную энергию (2). На рис. 6 показаны сечения интенсивности фокусных пятен по оси x для пучка (1) при $\alpha=0,1$ (6a) и Гауссова пучка (9) при $w=30\lambda$, ограниченных диафрагмой с радиусом $R=100\lambda$. Числовая апертура апланатического объектива равна $NA=0,99$.

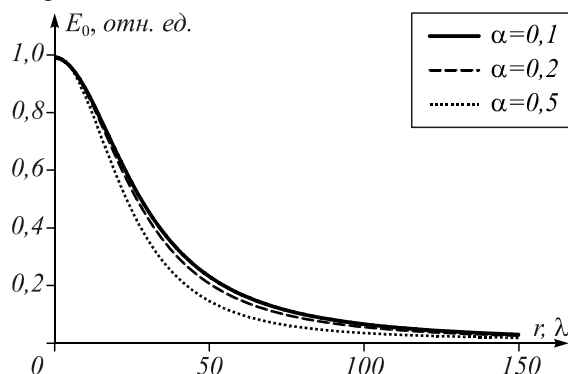


Рис. 5. Радиальные распределения амплитуды пучка (1) при $\alpha=0,1$ (кривая 1); $\alpha=0,2$ (кривая 2); $\alpha=0,5$ (кривая 3); $w=30\lambda$.

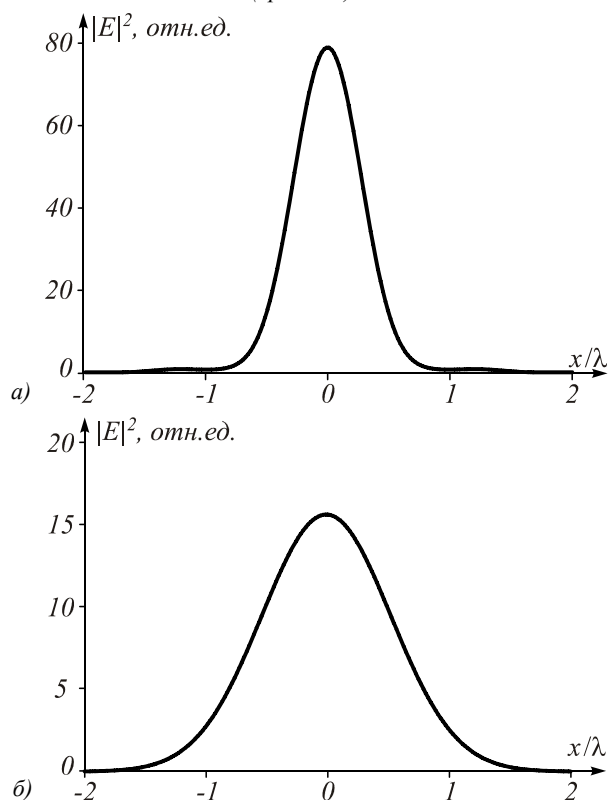


Рис. 6. Сечения интенсивности фокусных пятен по оси x для пучка (1) при $\alpha=0,1$ (a) и для Гауссова пучка (9) при $w=30\lambda$ ($R=100\lambda$, $NA=0,99$)

На рис. 6 интенсивность вычислялась по формуле

$$|E|^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2.$$

Заключение

В работе получены следующие результаты:

- получено выражение для диаметра фокусного пятна, сформированного неограниченным парааксиальным негауссовым пучком с амплитудой типа «колокол», обладающего конечной энергией (уравнение (7)), которое показывает, что этот диаметр в 3,45 раза меньше, чем диаметр фокусного пятна Гауссова пучка (уравнение (12)) при равенстве энергий обоих пучков;

- численно показано, что при ограничении пучков с одинаковой энергией круглой диафрагмой с радиусом, равным трём радиусам Гауссова пучка, диаметр фокусного пятна негауссова пучка в 1,46 раз меньше диаметра фокусного пятна соответствующего Гауссова пучка (рис. 2);

- также численно показано, что при ограничении пучков с одинаковой энергией круглой диафрагмой с радиусом, равным трём радиусам Гауссова пучка, диаметр фокусного пятна негауссова Фурье-инвариантного пучка в 1,51 раза меньше диаметра фокусного пятна соответствующего Гауссова пучка (рис. 3);

- соотношение неопределённостей, являющееся произведением диаметров парааксиальных пучков с конечной энергией в исходной плоскости и плоскости Фурье, определённых (диаметров) по полуспаду интенсивности для Гауссова пучка в 4 раза больше, чем для негауссова пучка с начальным амплитудным распределением в виде «колокола» (уравнения (28), (29));

- моделирование с помощью формул Ричардса - Вольфа показало, что острая фокусировка линейно-поляризованного Гауссова пучка с помощью апланатического объектива с числовой апертурой 0,99 и радиусом входного зрачка, равным 3,3 радиусам Гауссова пучка, даёт некруглое фокусное пятно, наименьший диаметр которого в 2 раза больше, чем наименьший диаметр фокусного пятна, сформированного соответствующим линейно-поляризованным негауссовым пучком с начальной амплитудой в виде «колокола».

Благодарности

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (госконтракт № 14.740.11.0016) и гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-7414.2010.9).

Литература

1. Wang, H. Creation of a needle of longitudinally polarized light in vacuum using binary optics / H. Wang, L. Shi, B. Lukyanchuk, C. Sheppard [et al.] // Nat. Photon. – 2008. – V. 2. – P. 501-505.
2. Huang, K. Design of DOE for generating a needle of a strong longitudinally polarized field / K. Huang, P. Shi, X. Kang, X. Zhang [et al.] // Opt. Lett. – 2010. – V. 35, N 7. – P. 965-967.
3. Rajesh, K.B. Improvement of lens axicon's performance for longitudinally polarized beam generation by adding

- a dedicated phase transmittance / K.B. Rajesh, Z. Jaroszewicz, P.M. Anbarasan // Opt. Express. – 2010. – V. 18, N 26. – P. 26799-26805.
4. **Kitamura, K.** Sub-wavelength focal spot with long depth of focus generated by radially polarized, narrow-width annular beam / K. Kitamura, K. Sakai, S. Noda // Opt. Express. – 2010. – V. 18, N 5. – P. 4518-4525.
 5. **Yuan, G.H.** Nondiffracting transversally polarized beam / G.H. Yuan, S.B. Wei, X. Yuan // Opt. Lett. – 2011. – V. 36, N 17. – P. 3479-3481.
 6. **Lin, H.** Generation of an axially super-resolved quasi-spherical focal spot using an amplitude-modulated radially polarized beam / H. Lin, B. Jia, M. Gu // Opt. Lett. – 2011. – V. 36, N 13. – P. 2471-2473.
 7. **Lin, J.** Achievement of longitudinally polarized focusing with long focal depth by amplitude modulation / J. Lin, K. Yin, Y. Li, J. Tan // Opt. Lett. – 2011. – V. 36, No. 7. – P. 1185-1187.
 8. **Li, X.** Superresolution-focal-volume induced 3.0 Tbytes/disk capacity by focusing a radially polarized beam / X. Li, Y. Cao, M. Gu // Opt. Lett. – 2011. – V. 36, N 13. – P. 2510-2512.
 9. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
 10. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1981.
 11. **Смокий, О.И.** Методы теории систем и преобразований в оптике / О.И. Смокий, В.А. Фабриков. – Л.: Наука, 1989.
 12. **Richards, B.** Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system / B. Richards, E. Wolf // Proc. R. Soc. London A. – 1959. – V. 253. – P. 358-379.
 13. **Стафеев, С.С.** Сравнительное моделирование двумя методами острой фокусировки зонной пластинкой / С.С. Стафеев, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2011. – Т. 35, № 3. – С. 305-310.
- References**
1. **Wang, H.** Creation of a needle of longitudinally polarized light in vacuum using binary optics / H. Wang, L. Shi, B. Lukyanchuk, C. Sheppard [et al.] // Nat. Photon. – 2008. – V. 2. – P. 501-505.
 2. **Huang, K.** Design of DOE for generating a needle of a strong longitudinally polarized field / K. Huang, P. Shi, X. Kang, X. Zhang [et al.] // Opt. Lett. – 2010. – V. 35, N 7. – P. 965-967.
 3. **Rajesh, K.B.** Improvement of lens axicon's performance for longitudinally polarized beam generation by adding a dedicated phase transmittance / K.B. Rajesh, Z. Jaroszewicz, P.M. Anbarasan // Opt. Express. – 2010. – V. 18, N 26. – P. 26799-26805.
 4. **Kitamura, K.** Sub-wavelength focal spot with long depth of focus generated by radially polarized, narrow-width annular beam / K. Kitamura, K. Sakai, S. Noda // Opt. Express. – 2010. – V. 18, N 5. – P. 4518-4525.
 5. **Yuan, G.H.** Nondiffracting transversally polarized beam / G.H. Yuan, S.B. Wei, X. Yuan // Opt. Lett. – 2011. – V. 36, N 17. – P. 3479-3481.
 6. **Lin, H.** Generation of an axially super-resolved quasi-spherical focal spot using an amplitude-modulated radially polarized beam / H. Lin, B. Jia, M. Gu // Opt. Lett. – 2011. – V. 36, N 13. – P. 2471-2473.
 7. **Lin, J.** Achievement of longitudinally polarized focusing with long focal depth by amplitude modulation / J. Lin, K. Yin, Y. Li, J. Tan // Opt. Lett. – 2011. – V. 36, N 7. – P. 1185-1187.
 8. **Li, X.** Superresolution-focal-volume induced 3.0 Tbytes/disk capacity by focusing a radially polarized beam / X. Li, Y. Cao, M. Gu // Opt. Lett. – 2011. – V. 36, N 13. – P. 2510-2512.
 9. Handbook of Mathematical Functions / ed. by M. Abramovitz, I. Stegun. – National Bureau of Standards, Washington, DC, 1964. – 1044 p.
 10. **Prudnikov, A.P.** Integrals and series / A.P. Prudnikov, J.A. Brychkov, O.I. Marichev. – Moscow: "Science" Publisher, 1981. – (in Russian).
 11. **Smoky, O.I.** Methods of the system theory and transformation in optics / O.I. Smoky, V.A. Fabrikov. – Leningrad: "Science" Publisher, 1989. – (in Russian).
 12. **Richards, B.** Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system / B. Richards, E. Wolf // Proc. R. Soc. London A. – 1959. – V. 253. – P. 358-379.
 13. **Stafeev, S.S.** Comparative modeling by two methods of a sharp focusing by a zone plate / S.S. Stafeev, V.V. Kotlyar // Computer optics. – 2011. – V. 35, N 3. – P. 305-310. – (in Russian).

DIAMETER OF A FOCAL SPOT FOR NON-GAUSSIAN BEAMS WITH A FINITE ENERGY

*V.V. Kotlyar, A.G. Nalimov, S.S. Stafeev
Image Processing Systems Institute of the RAS,
S.P. Korolyov Samara State Aerospace University*

Abstract

It is shown analytical and by a modeling, that radial symmetrical non-gauss paraxial beams with finite energy can help to reduce focal spot diameter in comparing with Gaussian beams in several times. In addition, examined non-gauss beams have an uncertainty relation calculated in half maximum intensity less in 4 times, then for Gaussian beam. Sharp focus modeling for such non-gauss beams with linear polarization shown an ability of reducing focal spot in 2 times in comparing with Gaussian beam.

Key words: Gaussian beam focusing, amplitude light distribution in a "bell" form, beams with a finite energy.

Сведения об авторах

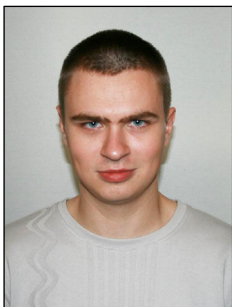
Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН и, по совместительству, профессор кафедры технической кибернетики Самарского государственного аэрокосмического университета (СГАУ). В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств.

Victor Victorovich Kotlyar is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute (Samara) of the Russian Academy of Sciences and professor of Computer Science Department at Samara State Aerospace University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in physics and mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE and OSA member. He is co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, optical vortices.



Налимов Антон Геннадьевич, 1980 года рождения, окончил Самарский государственный аэрокосмический университет в феврале 2003 года по специальности «Физика». Поступил в очную аспирантуру СГАУ по специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» в 2003 году, окончил её по специальности 01.04.05 «Оптика» в 2006 году. Работает на кафедре технической кибернетики СГАУ в должности доцента, в Институте систем обработки изображений РАН в должности научного сотрудника. Кандидат физико-математических наук, соавтор 48 работ.

Anton Gennadyevich Nalimov (b. 1980), finished Samara State Aerospace University in February, 2003. Entered in postgraduate study in 2003 on speciality 05.13.18 “Mathematical modeling and program complexes”, finished it in 2006 with speciality 01.04.05 “Optics”. Nalimov A.G. works on technical cybernetics department in SSAU as an associate professor, works as a scientist in Image processing systems institute of the Russian Academy of Sciences. Candidate in physics and mathematics, coauthor of 48 papers.



Стафеев Сергей Сергеевич, 1985 года рождения, в 2009 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладные математика и физика». Аспирант кафедры технической кибернетики СГАУ, стажёр-исследователь лаборатории лазерных измерений Института систем обработки изображений РАН (ИСОИ РАН). Область научных интересов: дифракционная оптика, разностное решение уравнений Максвелла, оптика ближнего поля.

E-mail: sergey.stafeev@gmail.com.

Sergey Sergeevich Stafeyev (b. 1985) received master’s degree in applied mathematics and physics in Samara State Aerospace University (2009). He is a postgraduate student of the Samara State Aerospace University and researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences (IPSI RAS). Scientific interests: diffractive optics, FDTD method, near-field optics.

Поступила в редакцию 14 октября 2011 г.