

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ ПРЕЛОМЛЯЮЩИХ ОПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ФОКУСИРОВКИ В КРИВУЮ

Дмитриев А.Ю.^{1,2}, Досколович Л.Л.^{1,2}, Асланов Э.Р.²

¹Институт систем обработки изображений РАН,

²Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

Аннотация

Разработан метод расчёта преломляющего оптического элемента для фокусировки светового пучка с плоским волновым фронтом в кривую заданной формы. Получено общее представление поверхности оптического элемента в виде огибающей семейства гиперболоидов вращения, каждый из которых фокусирует падающий пучок в точку на линии. Расчёт параметров гиперболоидов из условия формирования заданного распределения освещённости вдоль кривой сведён к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной. Предложено применение разработанного метода для фокусировки в набор точек на кривой. Рассчитаны оптические элементы для фокусировки на отрезок, в кривую, состоящую из двух дуг окружности, а также в наборы точек, расположенные на отрезке и дугах окружностей.

Ключевые слова: геометрическая оптика, фокусировка, преломляющий оптический элемент, лучи.

Введение

Задача фокусировки светового пучка в кривую актуальна для широкого круга прикладных областей, включающего лазерные технологии, оптическую обработку информации, микроскопию, светотехнику. Простейшая оптическая система для фокусировки плоского пучка в отрезок соответствует комбинации цилиндрической и сферической линз. Однако при использовании такой системы трудно получить линию высокого качества с требуемым распределением освещённости вдоль линии. Линии произвольной формы с требуемым распределением освещённости могут быть сформированы оптическими элементами с поверхностями свободной формы. Расчёт таких оптических элементов, как правило, основан на сложных оптимизационных процедурах [1–9] (исключением являются задачи с радиальной и цилиндрической симметрией и точечным источником излучения [10, 11]). Рабочие характеристики существующих итерационных процедур являются недостаточно хорошими, и задача расчёта преломляющих (отражающих) оптических элементов для точного формирования сложных распределений освещённости остаётся актуальной.

В работе [6] предложен «метод вспомогательных параболоидов» для расчёта зеркал с поверхностями свободной формы, предназначенных для формирования дискретных распределений интенсивности (освещённости), соответствующих набору точек. В этом случае поверхность зеркала представляется в виде набора сегментов параболоидов или эллипсоидов с определёнными параметрами. Расчёт параметров параболоидов (эллипсоидов) осуществляется итерационным методом, при этом сходимость метода строго доказана [6]. Данный подход был обобщён на случай расчёта преломляющих оптических элементов [7]. В этом случае поверхность оптического элемента состоит из сегментов картезианских ова-

лов. В [1, 2, 8, 9, 12] расчёт отражающих и преломляющих поверхностей для формирования непрерывных распределений освещённости основан на построении отображения между угловыми координатами лучей, выходящих из источника, и точками на выходной плоскости. При этом методы [6, 7] используются для определения вида указанного отображения [8].

На взгляд авторов, наиболее естественным представлением поверхности оптического элемента для формирования заданного распределения освещённости в виде двумерной области или кривой является огибающая поверхность. При этом в зависимости от типа оптического элемента (отражающий или преломляющий) поверхность представляется в виде огибающей параметрического семейства эллипсоидов (параболоидов) вращения или картезианских овалов. Такой подход ранее использовался авторами для расчёта зеркал, формирующих однопараметрические диаграммы направленности (диаграммы направленности в виде линий) [13–15]. В этом случае поверхность зеркала соответствует огибающей однопараметрического семейства параболоидов вращения (направления осей параболоидов определяют заданной диаграммой направленности). В важном практическом случае формирования диаграммы направленности в виде отрезка расчёт зеркала был сведён к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения, разрешённого относительно производной [15].

В настоящей работе авторы используют аналогичный подход для расчёта преломляющего оптического элемента, фокусирующего пучок с плоским волновым фронтом в кривую заданной формы. Для преломляющей поверхности оптического элемента получено аналитическое выражение, соответствующее огибающей семейства гиперболоидов вращения, каждый из которых фокусирует падающий пучок в точку на линии. Расчёт параметров гипербо-

лоидов вращения, обеспечивающих формирование вдоль кривой фокусировки заданного распределения энергии, в приближении тонкого оптического элемента сведён к решению дифференциального уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной. В качестве примеров рассчитаны оптические элементы для фокусировки в отрезок и в кривую, состоящую из двух дуг окружности. В работе также продемонстрировано применение предложенного метода для фокусировки плоского светового пучка в дискретный набор точек на кривой.

1. Расчёт преломляющей поверхности для фокусировки в кривую

Рассмотрим задачу расчёта преломляющего оптического элемента (показатель преломления материала элемента – n) для фокусировки пучка с плоским волновым фронтом в заданную линию (рис. 1). Направление падающего пучка совпадает с осью Oz . Оптический элемент ограничен двумя поверхностями (рис. 1). Первая поверхность элемента является плоской и лежит в плоскости $z=0$. Вторая поверхность является поверхностью свободной формы и описывается функцией $z = H(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x, y) \in D$ – декартовы координаты в плоскости $z=0$, D – апертура элемента. Задача состоит в расчёте функции $H(\mathbf{x})$, обеспечивающей фокусировку падающего пучка в кривую, расположенную в плоскости $z=f$ и заданную в параметрическом виде:

$$\mathbf{X}(\xi) = (X(\xi), Y(\xi), f), \tag{1}$$

где $\xi \in [0, d]$ – натуральный параметр. При этом вдоль кривой должно быть сформировано заданное распределение энергии, описываемое функцией $I(\xi)$, $\xi \in [0, d]$.

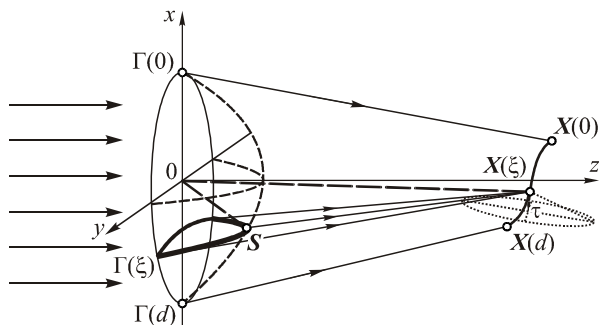


Рис. 1. Геометрия задачи фокусировки в линию

Сначала рассмотрим расчёт преломляющей линзы, фокусирующей плоскую волну (с направлением $\mathbf{p} = (0, 0, 1)$) в некоторую точку линии. Первую поверхность линзы будем считать плоской, расположенной в плоскости $z=0$. Для второй поверхности $h(\mathbf{x})$ из принципа Ферма несложно получить следующее неявное уравнение:

$$n \cdot h(x, y) + |\mathbf{X}(\xi) - \mathbf{S}| = \psi(\xi), \tag{2}$$

где $\mathbf{S} = (x, y, h(x, y))$ – радиус-вектор точки на поверхности оптического элемента, $\psi(\xi)$ – константа. При условии (2) оптическая длина путей лучей от исходного плоского волнового фронта (от плоскости $z=0$) до точки $\mathbf{X}(\xi)$ есть величина постоянная. Уравнение (2) записано в предположении, что показатель преломления среды вне линзы $n_0 = 1$. Константа $\psi(\xi)$ в (2) соответствует эйконалу светового поля в точке фокусировки $\mathbf{X}(\xi)$.

Известно, что преломляющая поверхность, фокусирующая в точку сферический световой пучок от точечного источника, является картезианским овалом [7, 16]. Таким образом, при фокусировке плоского пучка в точку преломляющая поверхность является частным случаем картезианского овала, когда один из фокусов (источник света) расположен в бесконечности. В этом случае картезианский овал соответствует гиперболоиду или эллипсоиду вращения (в зависимости от показателей преломления сред, разделяемых поверхностью). При условии $n/n_0 > 1$ поверхность (2) является гиперболоидом вращения.

Поверхность для фокусировки в линию (1) является огибающей семейства гиперболоидов вращения (2) по параметру ξ . Действительно, по определению огибающая поверхность касается каждого из гиперболоидов семейства (2) вдоль некоторой кривой. Поскольку направления нормалей огибающей поверхности и гиперболоидов (2) вдоль кривых касания совпадают, то преломлённые лучи будут сфокусированы в точки на кривой (1). Таким образом, расчёт преломляющей поверхности для фокусировки в линию (1) сводится к построению огибающей для семейства гиперболоидов вращения (2) по параметру ξ .

Огибающая поверхность определяется уравнением (2) и его производной по параметру ξ [17]:

$$\left(\frac{\mathbf{X}(\xi) - \mathbf{S}}{|\mathbf{X}(\xi) - \mathbf{S}|}, \frac{d\mathbf{X}(\xi)}{d\xi} \right) = \frac{d\psi(\xi)}{d\xi}. \tag{3}$$

Уравнение (3) является уравнением кругового конуса с вершиной в точке кривой $\mathbf{X}(\xi)$ и осью $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{X}(\xi)}{d\xi}$, совпадающей с касательной к линии (1) (рис. 1). Так как ξ является натуральным параметром, то $|\boldsymbol{\tau}| = 1$, а производная эйконала $\frac{d\psi(\xi)}{d\xi}$ определяет косинус половинного угла при вершине конуса. Таким образом, огибающая поверхность состоит из набора кривых $\Gamma(\xi)$, $\xi \in [0, d]$, являющихся пересечением конусов (3) с гиперболоидами вращения (2). При этом лучи, приходящие с кривой $\Gamma(\xi)$ в точку кривой $\mathbf{X}(\xi)$, лежат на поверхности конуса (3).

Уравнения (2), (3) определяют уравнение поверхности оптического элемента в неявном виде в декартовых координатах.

2. Расчёт поверхности оптического элемента в криволинейных координатах

Поверхность оптического элемента для фокусировки в кривую может быть записана в простом аналитическом виде при использовании специальных криволинейных координат, связанных с лучами. Введём для линии (1) вектора касательной, нормали и бинормали:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}(\xi) &= \left(\frac{dX(\xi)}{d\xi}, \frac{dY(\xi)}{d\xi}, 0 \right), \\ \mathbf{n}(\xi) &= \left(-\frac{dY(\xi)}{d\xi}, \frac{dX(\xi)}{d\xi}, 0 \right), \\ \mathbf{b} &= (0, 0, -1). \end{aligned} \tag{4}$$

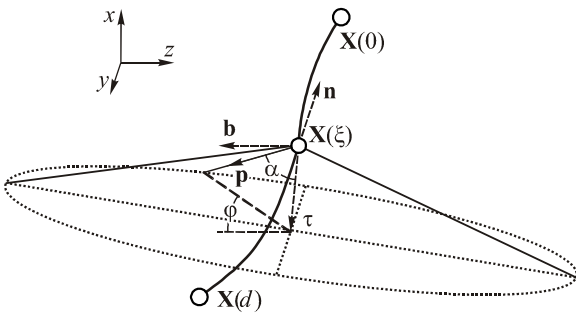


Рис. 2. Геометрия конуса лучей

Единичный вектор образующей конуса (3) можно представить в системе координат (4) в виде:

$$\mathbf{p}(\xi, \varphi) = \boldsymbol{\tau}(\xi) \cos(\alpha) + \mathbf{n}(\xi) \sin(\alpha) \sin(\varphi) + \mathbf{b} \sin(\alpha) \cos(\varphi), \tag{5}$$

где $\alpha = \arccos\left(\frac{d\psi(\xi)}{d\xi}\right)$ – половинный угол при вершине конуса, φ – угол в основании конуса, отсчитываемый от вектора \mathbf{b} по направлению к вектору $\mathbf{n}(\xi)$ (рис. 2). С использованием криволинейных координат (ξ, φ) уравнение поверхности оптического элемента может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\xi, \varphi) &= (x(\xi, \varphi), y(\xi, \varphi), z(\xi, \varphi)) = \\ &= \mathbf{X}(\xi) + \mathbf{p}(\xi, \varphi) \cdot l(\xi, \varphi), \end{aligned} \tag{6}$$

где $l(\xi, \varphi)$ – расстояние вдоль вектора луча от точки поверхности до точки на кривой (1) (рис. 1). Подставив (6) в (2), получим:

$$l(\xi, \varphi) = \frac{nf - \psi(\xi)}{np_z(\xi, \varphi) + 1}. \tag{7}$$

Уравнения (6), (7) определяют поверхность оптического элемента в аналитическом виде и зависят от функции эйконала $\psi(\xi)$. Эта функция определяет распределение энергии вдоль линии фокусировки (1). Рассмотрим расчёт $\psi(\xi)$ из условия формирования заданного распределения энергии $I(\xi)$, $\xi \in [0, d]$ вдоль кривой фокусировки. Для рас-

чёта функции $\psi(\xi)$ будем использовать закон сохранения светового потока. Для записи закона сохранения светового потока введём проекции $\Gamma_{\perp}(\xi)$ кривых $\Gamma(\xi)$ на плоскость $z=0$. Согласно (6), (7), проекции $\Gamma_{\perp}(\xi)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} x(\xi, \varphi) &= X(\xi) + (nf - \psi(\xi)) \times \\ &\times \frac{\left(\frac{dX(\xi)}{d\xi} \frac{d\psi(\xi)}{d\xi} - \frac{dY(\xi)}{d\xi} \sqrt{1 - \left(\frac{d\psi(\xi)}{d\xi} \right)^2} \sin(\varphi) \right)}{n \sqrt{1 - \left(\frac{d\psi(\xi)}{d\xi} \right)^2} \cos(\varphi) - 1}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} y(\xi, \varphi) &= Y(\xi) + (nf - \psi(\xi)) \times \\ &\times \frac{\left(\frac{dY(\xi)}{d\xi} \frac{d\psi(\xi)}{d\xi} + \frac{dX(\xi)}{d\xi} \sqrt{1 - \left(\frac{d\psi(\xi)}{d\xi} \right)^2} \sin(\varphi) \right)}{n \sqrt{1 - \left(\frac{d\psi(\xi)}{d\xi} \right)^2} \cos(\varphi) - 1}. \end{aligned}$$

Уравнения (8) связывают декартовы координаты (x, y) с криволинейными координатами (ξ, φ) . Координата ξ в (8) определяет кривую $\Gamma_{\perp}(\xi)$, а координата φ – положение точки на этой кривой.

Световой поток, заключённый между кривыми $\Gamma_{\perp}(\xi)$ и $\Gamma_{\perp}(\xi + \Delta\xi)$, записывается в виде:

$$\Delta\Phi = \Delta\xi \int_{\varphi_1(\xi)}^{\varphi_2(\xi)} I_0(\xi, \varphi) \left| J \left(\xi, \varphi; \frac{d\psi}{d\xi}; \frac{d^2\psi}{d\xi^2} \right) \right| d\varphi, \tag{9}$$

где $I_0(\xi, \varphi)$ – распределение освещённости падающего светового пучка,

$$\begin{aligned} J \left(\xi, \varphi; \psi(\xi); \frac{d\psi}{d\xi}; \frac{d^2\psi}{d\xi^2} \right) &= \\ &= \frac{\partial u(\xi, \varphi)}{\partial \xi} \frac{\partial v(\xi, \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{\partial u(\xi, \varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial v(\xi, \varphi)}{\partial \xi} \end{aligned} \tag{10}$$

якобиан преобразования координат (8). Согласно (8), якобиан (10) зависит от функции эйконала $\psi(\xi)$, а также от её первой и второй производных. Пределы интегрирования $\varphi_1(\xi)$ и $\varphi_2(\xi)$ в (9) определяют точки пересечения кривых $\Gamma_{\perp}(\xi)$ с границами апертуры в плоскости $z=0$. Например, для круговой апертуры с радиусом R функции $\varphi_1(\xi)$ и $\varphi_2(\xi)$ находятся из уравнения

$$x^2(\xi, \varphi) + y^2(\xi, \varphi) = R^2. \tag{11}$$

Согласно построению оптического элемента световой поток $\Delta\Phi$, заключённый между кривыми $\Gamma_{\perp}(\xi)$, $\Gamma_{\perp}(\xi + \Delta\xi)$, переходит в сегмент кривой длиной $\Delta\xi$, ограниченной точками $\mathbf{X}(\xi)$ и $\mathbf{X}(\xi + \Delta\xi)$. Соответственно, световой поток на единицу длины кривой фокусировки можно записать в следующем виде:

$$I(\xi) = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta\xi} = \int_{\varphi_1(\xi)}^{\varphi_2(\xi)} I_0(\xi, \varphi) \left| J \left(\xi, \varphi; \psi(\xi); \frac{d\psi}{d\xi}; \frac{d^2\psi}{d\xi^2} \right) \right| d\varphi. \tag{12}$$

Функция $I(\xi)$ в (12) определяет линейную плотность энергии вдоль кривой. При заданной линейной плотности $I(\xi)$ уравнение (12) становится нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка относительно функции $\psi(\xi)$. Таким образом, расчёт оптического элемента для фокусировки в линию сводится к решению уравнения (12) относительно функции $\psi(\xi)$ и последующему расчёту поверхности по аналитическим выражениям (6), (7).

3. Закон сохранения светового потока в приближении тонкого оптического элемента

Решение нелинейного дифференциального уравнения (12) является сложной вычислительной задачей. Его можно существенно упростить в приближении тонкого оптического элемента. В этом случае в качестве проекций $\Gamma_{\perp}(\xi)$ можно приближённо рассматривать кривые, которые являются пересечением конусов (3) с плоскостью $z=0$. Указанные кривые являются гиперболами и могут быть получены из уравнений (5), (6) в виде [18, 19]:

$$x(\xi, \eta) = X(\xi) + a(\xi)\sqrt{f^2 + \eta^2} \frac{dX(\xi)}{d\xi} - \eta \frac{dY(\xi)}{d\xi}, \tag{13}$$

$$y(\xi, \eta) = Y(\xi) + a(\xi)\sqrt{f^2 + \eta^2} \frac{dY(\xi)}{d\xi} + \eta \frac{dX(\xi)}{d\xi},$$

где

$$a(\xi) = \frac{d\psi(\xi)}{d\xi} / \sqrt{1 - \left(\frac{d\psi(\xi)}{d\xi} \right)^2}, \quad \eta = f \operatorname{tg}(\varphi). \tag{14}$$

Поскольку производная $\frac{d\psi(\xi)}{d\xi}$ соответствует косинусу половинного угла при вершине конуса лучей (3), то функция $a(\xi)$ в (14) соответствует котангенсу половинного угла при вершине конуса.

Якобиан преобразования координат (13) имеет вид:

$$J \left(\xi, \eta; a(\xi); \frac{da}{d\xi} \right) = \left[1 + \frac{da(\xi)}{d\xi} \sqrt{f^2 + \eta^2} \right] + \eta (a^2(\xi) + 1) K(\xi), \tag{15}$$

где $K(\xi) = \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \frac{dY(\xi)}{d\xi} - \frac{dX(\xi)}{d\xi} \frac{d^2 Y(\xi)}{d\xi^2}$ – кривизна линии (1). Якобиан (15) зависит от функции $a(\xi)$ и её первой производной.

В приближении тонкого оптического элемента закон сохранения светового потока (12) принимает вид:

$$I(\xi) = \int_{\eta_1(\xi)}^{\eta_2(\xi)} I_0(\xi, \eta) J \left(\xi, \eta; a(\xi); \frac{da}{d\xi} \right) d\eta. \tag{16}$$

Функцию $a(\xi)$ можно получить из (16) из условия формирования заданной линейной плотности энергии $I(\xi)$. Действительно, подставляя (15) в (16), получим для функции $a(\xi)$ следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{da(\xi)}{d\xi} = \left(I(\xi) - (a^2(\xi) + 1) K(\xi) \int_{\eta_1(\xi)}^{\eta_2(\xi)} I_0(\xi, \eta) \eta d\eta - \int_{\eta_1(\xi)}^{\eta_2(\xi)} I_0(\xi, \eta) d\eta \right) / \left(\int_{\eta_1(\xi)}^{\eta_2(\xi)} I_0(\xi, \eta) \sqrt{f^2 + \eta^2} d\eta \right). \tag{17}$$

В отличие от уравнения (12), интегрирование уравнения (17) является тривиальной вычислительной задачей и может быть выполнено с помощью стандартных численных методов, например метода Рунге–Кутты.

Выражения для преломляющей поверхности (6), (7) зависят от функции эйконала и её производной, которые несложно получить из (14) в виде:

$$\frac{d\psi(\xi)}{d\xi} = \frac{a(\xi)}{\sqrt{1 + a^2(\xi)}}, \quad \psi(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{a(t)}{\sqrt{1 + a^2(t)}} dt. \tag{18}$$

Таким образом, выражения (6), (7) (17) и (18) представляют собой законченное решение задачи фокусировки в кривую (1) с заданным распределением линейной плотности энергии $I(\xi)$. При этом расчёт поверхности оптического элемента состоит из следующих шагов:

- 1) Выбор вида кривой фокусировки (1), требуемого распределения линейной плотности энергии и распределения освещённости падающего пучка.
- 2) Численное интегрирование дифференциального уравнения первого порядка (17).
- 3) Расчёт функции эйконала и его производной по формулам (18).
- 4) Расчёт поверхности оптического элемента по формулам (6), (7).

Таким образом, расчёт поверхности оптического элемента сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной, (17) и последующему интегрированию полученного решения в (18).

Отметим, что полученное решение является приближённым, поскольку расчёт функции $\psi(\xi)$, определяющей распределение линейной плотности энергии вдоль линии фокусировки, выполнен в приближении тонкого оптического элемента. Тем не менее результаты расчёта, представленные в следующем пункте, показывают возможность использования данного приближения даже при расчёте оптических элементов с большой числовой апертурой (когда углы преломлённых лучей с осью Oz достигают 28°).

4. Фокусировка в отрезок и в составную из двух дуг окружности кривую

Для демонстрации работоспособности разработанного метода были рассчитаны оптические элементы с круглой апертурой для фокусировки светового пучка с равномерным распределением освещённости $I_0(\mathbf{x}) = I_0$ в отрезок и в кривую, состоящую из двух дуг окружности. Для обеих кривых была задана постоянная линейная плотность энергии $I(\xi) = I, \xi \in [0, d]$. Параметрические уравнения указанных кривых имеют вид:

$$\mathbf{X}_{seg}(\xi) = \left(\xi - \frac{d}{2}, 0, f \right), \quad \xi \in [0, d], \quad (19)$$

$$\mathbf{X}_{arc}(\xi) = R_{arc} \times \begin{cases} \left(\begin{matrix} -\sin((\xi - d/2)/R_{arc}), \\ -\cos((\xi - d/2)/R_{arc}) + 1, \\ f/R_{arc} \end{matrix} \right), & \xi \in \left[0, \frac{d}{2} \right], \\ \left(\begin{matrix} \sin((\xi - d/2)/R_{arc}), \\ \cos((\xi - d/2)/R_{arc}) - 1, \\ f/R_{arc} \end{matrix} \right), & \xi \in \left[\frac{d}{2}, d \right], \end{cases} \quad (20)$$

где R_{arc} – радиус дуг окружностей, а $\varphi_{arc} = R_{arc} / d$ – угловой размер дуг. Расчёт производился по формулам (6), (7), (17), (18) при следующих параметрах: радиус апертуры $R = 20$ мм, расстояние до плоскости фокусировки $f = 50$ мм, длина отрезка $d = 10$ мм, радиус дуг окружностей $R_{arc} = 5,7$ мм, угловой размер дуг $\varphi_{arc} = 45^\circ$.

Рассчитанные элементы приведены на рис. 3. Излом поверхности с рис. 3б в центральном сечении (в плоскости $x = 0$) объясняется тем, что вектор кривизны линии (20) в точке $\mathbf{X}(0)$ меняет знак. Расчётные распределения освещённости, формируемые элементами с рис. 3, приведены на рис. 4. Распределения освещённости на рис. 4 были рассчитаны с использованием коммерческой программы по светотехнике TracePro [20] при коллимированном падающем пучке с постоянной освещённостью. Результаты моделирования показывают высокое качество фокусировки в заданные кривые. Несмотря на то, что использованное при расчёте уравнение (17) является приближённым, рассчитанные распределения освещённости вдоль линий близки к равномерным распределениям (средне-квадратические отклонения полученных распределений от равномерного составляют менее 5%). Отметим, что при указанных параметрах углы преломлённых лучей с осью Oz достигают 28° , то есть рассматриваемые оптические элементы работают в существенно непараксиальном режиме.

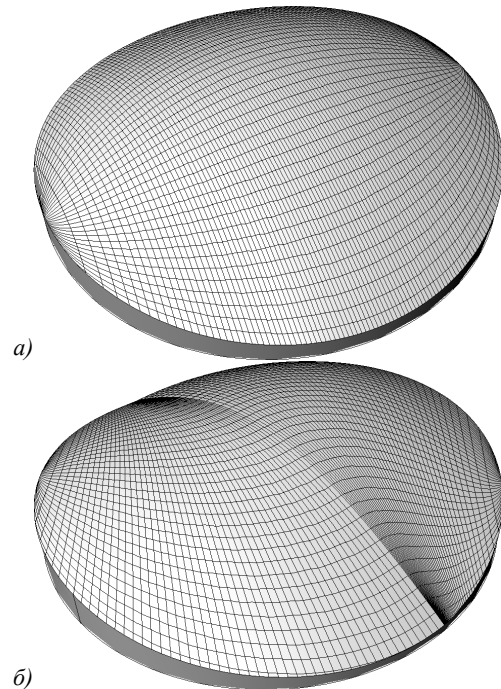


Рис. 3. Преломляющие оптические элементы для фокусировки в отрезок (а) и в кривую, состоящую из двух дуг окружности (б)

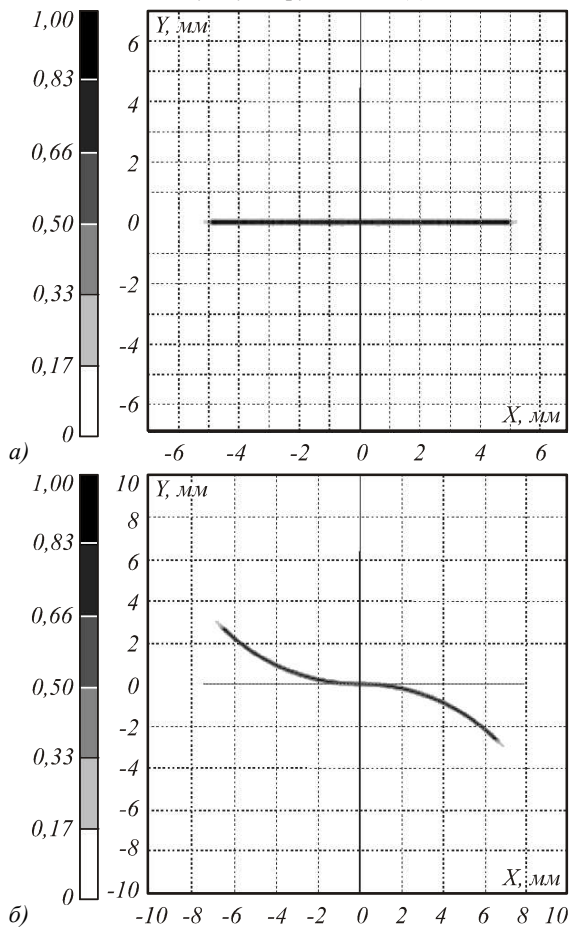


Рис. 4. Распределения освещённости, формируемые рассчитанными оптическими элементами для фокусировки в отрезок (а) и в кривую, состоящую из двух дуг окружности (б)

5. Фокусировка в набор точек на кривой

В работах [6–8] рассмотрены итерационные методы для решения обратной задачи фокусировки в набор точек. Предложенный в данной работе метод позволяет получить аналитическое решение задачи расчёта преломляющей поверхности для фокусировки в набор точек, лежащих на кривой (1). В этом случае поверхность представляет собой набор сегментов линз, каждый из которых фокусирует падающий на него световой пучок в соответствующую точку.

Набор точек на кривой (1) определим в виде:

$$\mathbf{X}_p(\xi) = \mathbf{X}(\bar{\xi}_i), \quad \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}), \quad i = \overline{1, N+1}, \quad (21)$$

где $\bar{\xi}_i = \frac{\xi_i + \xi_{i+1}}{2}$ – центральная точка полуинтервала

$[\xi_i, \xi_{i+1})$, $\xi_i = \frac{d}{N}(i-1)$, N – количество точек, в которые производится фокусировка.

Расчёт поверхности оптического элемента для фокусировки в набор точек (21) производится по ранее полученным формулам (5), (6), (7), (17) (18). Отличие от случая фокусировки в кривую (1) состоит в том, что в выражении (7) вместо непрерывной функции эйконала $\psi(\xi)$ используется кусочно-постоянная функция $\psi_p(\xi)$:

$$\psi_p(\xi) = \psi(\bar{\xi}_i), \quad \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}), \quad i = \overline{1, N+1}. \quad (22)$$

Рассчитанные описанным выше способом оптические элементы для фокусировки в набор точек на отрезке и в набор точек на кривой из двух дуг окружности представлены на рис. 5. На рис. 6 представлены результаты моделирования распределений освещённости, формируемых рассчитанными оптическими элементами, в программе TrasePro. Они показывают высокое качество фокусировки в заданный набор точек.

Заключение

Предложено аналитическое представление преломляющей поверхности для фокусировки в заданную кривую в виде огибающей семейства гиперболоидов вращения. В приближении тонкого оптического элемента задача фокусировки в кривую с заданным распределением линейной плотности энергии сведена к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной. Результаты моделирования распределений освещённости, формируемых элементами, рассчитанными из условия фокусировки в отрезок и дугу окружности, показывают эффективность предложенного метода. Предложено применение разработанного метода для фокусировки в дискретный набор точек на кривой. Рассчитаны оптические элементы для фокусировки в набор точек на отрезке и на кривой, состоящей из двух дуг окружности. Результаты моделирования работы рассчитанных элементов показывают эффективность предложенного метода.

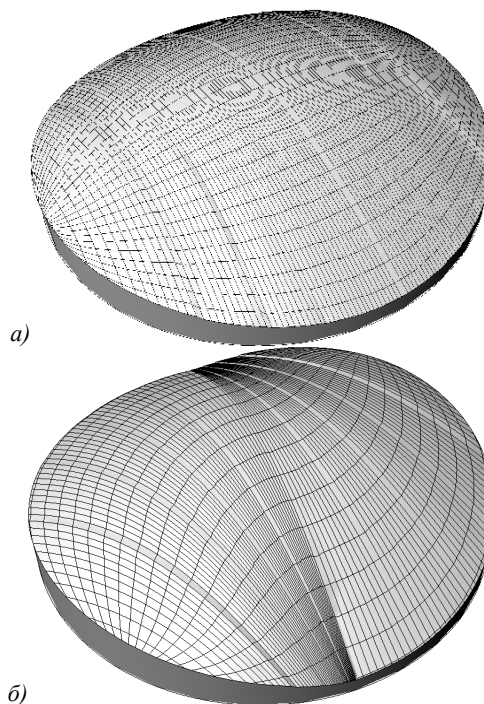


Рис. 5. Преломляющие оптические элементы для фокусировки в набор точек на отрезке (а) и на кривой из двух дуг окружности (б)

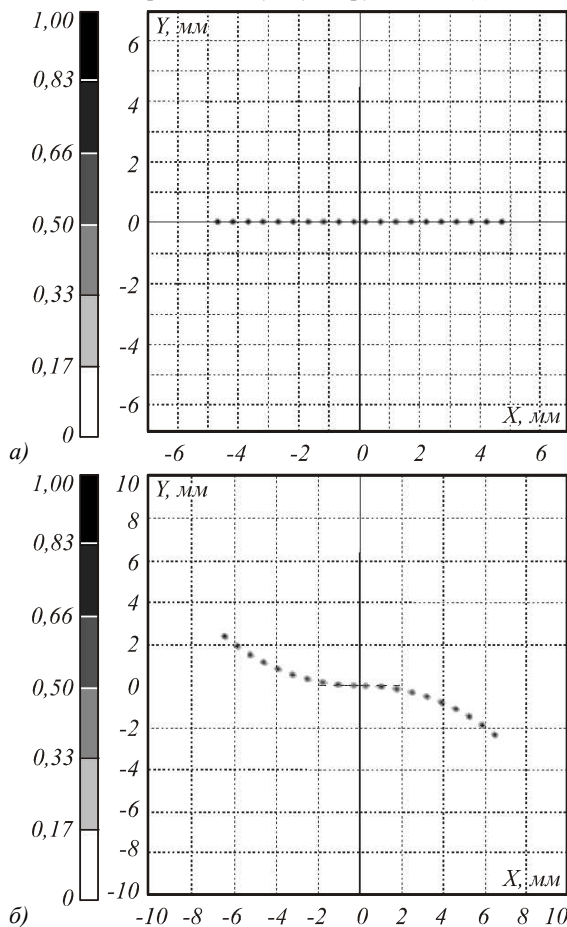


Рис. 6. Распределения освещённости, формируемые рассчитанными оптическими элементами для фокусировки в наборы точек на отрезке (а) и на кривой, состоящей из двух дуг окружности (б)

Представленный метод может быть обобщён на случай освещающего пучка с произвольным волновым фронтом. В этом случае поверхность оптического элемента представляется в виде огибающей семейства поверхностей, фокусирующих падающий пучок в точки линии. В частности, при сферическом освещающем пучке поверхность оптического элемента представляется в виде огибающей семейства картезианских овалов.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации и грантов РФФИ 12-07-31055, 12-07-31193, 12-07-13113, 13-07-97001.

Литература

- Feng, Z.** Design of LED freeform optical system for road lighting with high luminance/illuminance ratio / Z. Feng, Y. Luo and Y. Han // *Opt. Express.* – 2010. – V. 18. – P. 22020-22031.
- Luo, Y.** Design of compact and smooth free-form optical system with uniform illuminance for LED source / Y. Luo, Z. Feng, Y. Han and H. Li // *Opt. Express.* – 2010. – V. 18. – P. 9055-9063.
- Doskolovich, L.L.** Design of refractive spline surface for generating required irradiance distribution with large angular dimension / L.L. Doskolovich, M.A. Moiseev // *J. Mod. Opt.* – 2010. – V. 57. – P. 536-544.
- Doskolovich, L.L.** Design of high-efficient freeform LED lens for illumination of elongated rectangular regions / L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, M.A. Moiseev // *Opt. Express.* – 2011. – V. 19. – P. A225-A233.
- Wang, K.** Design of compact freeform lens for application specific light-emitting diode packaging / K. Wang, F. Chen and Z. Liu // *Opt. Express.* – 2010. – V. 18. – P. 413-425.
- Oliker, V.I.** Mathematical aspects of design of beam shaping surfaces in geometrical optics / V.I. Oliker // *Trends in Nonlinear Analysis* / V.I. Oliker, M. Kirkilionis, S. Krömker, R. Rannacher, F. Tomi. – eds. – Springer, 2003. – P. 197-224.
- Michaelis, D.** Cartesian oval representation of freeform optics in illumination systems / D. Michaelis, P. Schreiber and A. Bäuer // *Opt. Lett.* – 2011. – V. 36. – P. 918-920.
- Fournier, F.R.** Fast freeform reflector generation using source-target maps / F.R. Fournier, W.J. Cassarly, J.P. Rolland // *Opt. Express.* – 2010. – V. 18. – P. 5295-5204.
- Hu, R.** Design of a novel freeform lens for LED uniform illumination and conformal phosphor coating / R. Hu, X. Luo, H. Zheng, Z. Qin, Z. Gan, B. Wu, S. Liu // *Opt. Express.* – 2012. – V. 20. – P. 13727-13737.
- Chen, J.-J.** Freeform lens design for LED collimating illumination / J.-J. Chen, T.-Y. Wang, K.-L. Huang, T.-S. Liu, M.-D. Tsai, C.-T. Lin // *Opt. Express.* – 2012. – V. 20. – P. 10984-10995.
- Moiseev, M.A.** Design of TIR optics generating the prescribed irradiance distribution in the circle region / M.A. Moiseev, L.L. Doskolovich // *J. Opt. Soc. Am.* – 2012. – V. A29. – P. 1758-1763.
- Ding, Y.** Freeform LED lens for uniform illumination / Y. Ding, X. Liu, Z. Zheng, P. Gu // *Opt. Express.* – 2008. – V. 16. – P. 12958-12966.
- Doskolovich, L.L.** Designing reflectors to generate a line-shaped directivity diagram / L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov, P. Perlo and S. Bernard // *J. Mod. Opt.* – 2005. – V. 52. – P. 1529-1536.
- Doskolovich, L.L.** A DOE to form a line-shaped directivity diagram / L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, V.A. Soifer, S.I. Kharitonov and P. Perlo // *J. Mod. Opt.* – 2004. – V. 51. – P. 1999-2005.
- Doskolovich, L.L.** Designing a mirror to form a line-shaped directivity diagram / L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy and S. Bernard // *J. Mod. Opt.* – 2007. – V. 54. – P. 589-597.
- Winston, R.** *Nonimaging Optics* / R. Winston, J.C. Minano and P. Benitez. – Elsevier Academic Press, 2005. – 325 p.
- Eisenhart, L.P.** *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces* / L.P. Eisenhart. – Schwarz Press, 2008. – 275 p.
- Doskolovich, L.L.** Analytic design of optical elements generating a line focus / L.L. Doskolovich, A.Yu. Dmitriev, S.I. Kharitonov // *Optical Engineering.* – 2013. – V. 52(9). – P. 091707(7).
- Дмитриев, А.Ю.** Геометрооптический расчёт оптических элементов для фокусировки в линию в непараксиальном случае / А.Ю. Дмитриев, Л.Л. Досколович, С.И. Харитонов, М.А. Моисеев // *Компьютерная оптика.* – 2009. – Т. 33, № 2). – С. 122-128.
- Lambda Research Corporation, “TracePro Suite of Optical and Illumination Design Software” – http://www.lambdare.com/software_products/tracepro/.

References

- Feng, Z.** Design of LED freeform optical system for road lighting with high luminance/illuminance ratio / Z. Feng, Y. Luo and Y. Han // *Opt. Express.* – 2010. – V. 18. – P. 22020-22031.
- Luo, Y.** Design of compact and smooth free-form optical system with uniform illuminance for LED source / Y. Luo, Z. Feng, Y. Han and H. Li // *Opt. Express.* – 2010. – V. 18. – P. 9055-9063.
- Doskolovich, L.L.** Design of refractive spline surface for generating required irradiance distribution with large angular dimension / L.L. Doskolovich, M.A. Moiseev // *J. Mod. Opt.* – 2010. – V. 57. – P. 536-544.
- Doskolovich, L.L.** Design of high-efficient freeform LED lens for illumination of elongated rectangular regions / L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, M.A. Moiseev // *Opt. Express.* – 2011. – V. 19. – P. A225-A233.
- Wang, K.** Design of compact freeform lens for application specific light-emitting diode packaging / K. Wang, F. Chen and Z. Liu // *Opt. Express.* – 2010. – V. 18. – P. 413-425.
- Oliker, V.I.** Mathematical aspects of design of beam shaping surfaces in geometrical optics / V.I. Oliker // *Trends in Nonlinear Analysis* / V.I. Oliker, M. Kirkilionis, S. Krömker, R. Rannacher, F. Tomi. – eds. – Springer, 2003. – P. 197-224.
- Michaelis, D.** Cartesian oval representation of freeform optics in illumination systems / D. Michaelis,

- P. Schreiber and A. Bäuer // Opt. Lett. – 2011. – V. 36. – P. 918-920.
8. **Fournier, F.R.** Fast freeform reflector generation using source-target maps / F.R. Fournier, W.J. Cassarly, J.P. Rolland // Opt. Express. – 2010. – V. 18. – P. 5295-5204.
 9. **Hu, R.** Design of a novel freeform lens for LED uniform illumination and conformal phosphor coating / R. Hu, X. Luo, H. Zheng, Z. Qin, Z. Gan, B. Wu, S. Liu // Opt. Express. – 2012. – V. 20. – P. 13727-13737.
 10. **Chen, J.-J.** Freeform lens design for LED collimating illumination / J.-J. Chen, T.-Y. Wang, K.-L. Huang, T.-S. Liu, M.-D. Tsai, C.-T. Lin // Opt. Express. – 2012. – V. 20. – P. 10984-10995.
 11. **Moiseev, M.A.** Design of TIR optics generating the prescribed irradiance distribution in the circle region / M.A. Moiseev, L.L. Doskolovich // J. Opt. Soc. Am. – 2012. – V. A29. – P. 1758-1763.
 12. **Ding, Y.** Freeform LED lens for uniform illumination / Y. Ding, X. Liu, Z. Zheng, P. Gu // Opt. Express. – 2008. – V. 16. – P. 12958-12966.
 13. **Doskolovich, L.L.** Designing reflectors to generate a line-shaped directivity diagram / L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov, P. Perlo and S. Bernard // J. Mod. Opt. – 2005. – V. 52. – P. 1529-1536.
 14. **Doskolovich, L.L.** A DOE to form a line-shaped directivity diagram / L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, V.A. Soifer, S.I. Kharitonov and P. Perlo // J. Mod. Opt. – 2004. – V. 51. – P. 1999-2005.
 15. **Doskolovich, L.L.** Designing a mirror to form a line-shaped directivity diagram / L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy and S. Bernard // J. Mod. Opt. – 2007. – V. 54. – P. 589-597.
 16. **Winston, R.** Nonimaging Optics / R. Winston, J.C. Minano and P. Benitez. – Elsevier Academic Press, 2005. – 325 p.
 17. **Eisenhart, L.P.** A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces / L.P. Eisenhart. – Schwarz Press, 2008. – 275 p.
 18. **Doskolovich, L.L.** Analytic design of optical elements generating a line focus / L.L. Doskolovich, A.Yu. Dmitriev, S.I. Kharitonov // Optical Engineering. – 2013. – V. 52(9). – P. 091707(7).
 19. **Dmitriev, A.Yu.** Geometric-optics design of optical elements to produce a line focus / A.Yu. Dmitriev, L.L. Doskolovich, S.I. Kharitonov, M.A. Moiseev // Computer Optics. – 2009. – V. 33(2). – P. 122-128. – (In Russian).
 20. Lambda Research Corporation, “TracePro Suite of Optical and Illumination Design Software” – http://www.lambdare.com/software_products/tracepro/.

ANALYTICAL DESIGN OF REFRACTIVE OPTICAL ELEMENTS GENERATING A CURVE

A.Yu. Dmitriev^{1,2}, L.L. Doskolovich^{1,2}, E. Aslanov²

¹ *Image Processing Systems Institute of the RAS,*

² *S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (National Research University)*

Abstract

A method for designing refractive optical elements focusing collimated incident beam into a curve with specified shape is proposed. A general relationship for the freeform surface of the optical element is derived as an envelope of a parametric family of hyperboloids of revolution which focus the incident beam into the points on the curve. Using the thin optical element approximation, the calculation of the hyperboloid parameters providing required irradiance distribution along the curve is reduced to the solution of an explicit first order differential equation. The application for the proposed method to focus into the set of points on the curve is presented. The optical element generating line segment focus and the composite optical element to focus into the curve that consists of two circular arcs are designed. The optical elements to focus into the set of points on the line-segment and on the curve that consists of two circle arcs.

Key words: geometrical optics, focusing, refracting optical element, rays.

Сведения об авторах



Дмитриев Антон Юрьевич, 1984 года рождения, в 2007 году окончил с отличием Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (СГАУ) по специальности «Прикладная математика и информатика». Кандидат физико-математических наук (с 2011 г.), работает научным сотрудником в лаборатории дифракционной оптики Института систем обработки изображений РАН (ИСОИ РАН). Является соавтором 15 научных публикаций и 2 патентов. Научные интересы связаны с неизображающей и дифракционной оптикой.

Anton Yurievich Dmitriev (b. 1984) graduated with honours (2007) from the Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov (SSAU), majoring in Applied Mathematics and Informatics. He received his PhD in Physics and Mathematics from Samara State Aerospace University (2011). His current position is a researcher at Image Processing Systems Institute of the RAS. He is co-author of 15 scientific papers and 2 patents. His current research interests include nonimaging and diffractive optics.

Сведения об авторе **Досколович Леонид Леонидович** – см. стр.145 этого номера



Асланов Эмиль, 1986 года рождения. В 2009 году с отличием окончил Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана по специальности «Экологический мониторинг». Занимался исследованиями в области светодиодной оптики в компании LG с 2008 по 2012. В настоящее время является экспертом в области патентования в Центре интеллектуальной собственности. Является членом международного научного общества SPIE. Область научных интересов: геометрическая оптика, дифракционная оптика.

E-mail: EAslanov@sk.ru.

Emil Aslanov (b. 1986) graduated with honors (2009) from Bauman Moscow State Technical University, majoring in Ecological Monitoring. He has been working in LG as an optical R&D engineer 2008-2012. Now he is a patent expert in the Center of Intellectual Property. He is a SPIE member. His current research interests include geometrical optics, mathematical modeling, diffractive optics.

Поступила в редакцию 18 марта 2013 г.