

## СПИРАЛЬНЫЕ ПУЧКИ ДЛЯ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ КАК ОБОБЩЕНИЕ ПУЧКОВ ЛАГЕРРА–ГАУССА

Волостников В.Г.

*Самарский филиал федерального государственного бюджетного учреждения науки  
Физического института им. П.Н. Лебедева, Российская академия наук,  
Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва  
(национальный исследовательский университет) (СГАУ)*

### Аннотация

В работе исследованы спиральные пучки как обобщение известных пучков Лагерра–Гаусса. Показано, что, подобно пучкам Лагерра–Гаусса, данное обобщение также описывается действием некоторого оператора. Найден ряд характеристик таких пучков: условие квантования, амплитуда, скалярное произведение и угловой момент, а также результат их астигматического преобразования. Полученные результаты могут представлять интерес для лазерных технологий и микроманипулирования.

*Ключевые слова:* когерентная оптика, спиральные пучки света.

### Введение

Новые типы лазерных пучков привлекают внимание многих оптиков [1, 2]. Ранее было показано, что во множестве спиральных пучков, т.е. световых полей, сохраняющих при распространении и фокусировке свою структуру с точностью до масштаба и вращения, существуют световые поля в виде произвольных замкнутых кривых. Простейшим примером этого являются пучки в виде колец, они же пучки Лагерра–Гаусса  $LG_{0,N}(x, y)$ . С другой стороны, известно, что всё семейство Лагерра–Гаусса не исчерпывается этим множеством. Известно также, что произвольный пучок Лагерра–Гаусса  $LG_{M,N}(x, y)$  можно построить из пучка  $LG_{0,N}(x, y)$  действием некоторого оператора (оператора рождения). Аналогично этому любой спиральный пучок можно подвергнуть действию того же оператора и получить некие аналоги пучкам Лагерра–Гаусса  $LG_{M,N}(x, y)$ . Исследованию свойств таких пучков и посвящена данная работа.

### 1. Производные спиральные пучки

В работах [3, 4] было показано, что в классе спиральных пучков вида  $S_0(z, \bar{z}) = f(z)e^{-z\bar{z}}$ , где  $f(z)$  – целая аналитическая функция, имеется семейство световых полей, имеющих вид порождающей кривой  $\zeta(t)$ . Эти поля для параметра вращения  $\theta_0 = -1$  имеют вид:

$$\begin{aligned} S_0(z, \bar{z})|_{s(t), t \in [0, T]} = \\ = \exp(-z\bar{z}) \int_0^T \exp(-\zeta(t)\bar{\zeta}(t) + 2z\bar{\zeta}(t)) \times \\ \times \exp\left(\int_0^t (\bar{\zeta}(\tau)\zeta'(\tau) - \zeta(\tau)\bar{\zeta}'(\tau)) d\tau\right) |\zeta'(t)| dt. \end{aligned} \quad (1)$$

Угол поворота пучка при распространении имеет вид:

$$\theta(l) = \theta_0 \arctg\left(\frac{2l}{k\rho^2}\right), \quad (2)$$

где  $\theta_0 = \text{const}$ ,  $l$  – расстояние вдоль направления распространения,  $\rho$  – Гауссов параметр пучка.

С другой стороны, спиральные пучки с  $\theta_0 = -1$  представляют собой в общем случае довольно нетривиальную комбинацию различных мод Лагерра–Гаусса [5]:

$$S(z, \bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n LG_{N,n}(z, \bar{z}) + \sum_{n=0}^N C_{-n} LG_{N,-n}(z, \bar{z}), \quad (3)$$

где  $N$  – любое,  $C_n$  – произвольные константы.

Этому выражению можно придать более наглядную форму, если воспользоваться дифференциальным представлением функций Лагерра–Гаусса [6]:

$$\begin{aligned} LG_{n,\pm N}(X, Y) = \frac{(-1)^{n+N}}{2^{n+N} n!} \exp(X^2 + Y^2) \times \\ \times \frac{\partial^n}{\partial(X \pm iY)^n} \frac{\partial^{n+N}}{\partial(X \mp iY)^{n+N}} \exp(-2X^2 - 2Y^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} S_N(z, \bar{z}) = \exp(z\bar{z}) \frac{\partial^N}{\partial z^N} (\exp(-2z\bar{z}) f(z)) = \\ = \exp(z\bar{z}) \left(\frac{\partial}{\partial z} - 2\bar{z}\right)^N f(z) = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\right)^N (f(z)e^{-z\bar{z}}). \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, формула (3) порождает такую цепочку:

*Окружность*  $\rightarrow$  Пучки  $LG_{0,n}(z, \bar{z}) \rightarrow$  Пучки  $LG_{n_1, n_2}(z, \bar{z})$ .

Эта цепочка является очень важной, во-первых, потому, что она показывает, что моды Лагерра–Гаусса вида  $LG_{0,n}(z, \bar{z})$  есть частный случай квантованных спиральных пучков в виде окружности.

Во-вторых, из (5) можно получить всё семейство пучков Лагерра–Гаусса:

$$S_N(z, \bar{z}) = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\right)^N S_0(z, \bar{z}). \quad (6)$$

Полагая в (6)  $S_0(z, \bar{z}) = \exp(-z\bar{z})z^n$ , получим, что  $S_n(z, \bar{z})$  с точностью до постоянного множителя совпадает с пучком Лагерра–Гаусса общего вида  $LG_{n,n-N}(x/\rho, y/\rho)$  (рис. 1).

При этом в зависимости от того, какое из двух неравенств верно,  $n \geq N$  или  $n < N$ , справедливы следующие выражения (доказательство см. в **Приложении**):

$$\begin{aligned} S_N = (-1)^{n-N} N! LG_{N,n-N}(z, \bar{z}), n \geq N, \\ S_N^1 = \frac{(-1)^{N-n} \cdot 2^N n!}{2^n} LG_{n,N-n}(z, \bar{z}), n < N. \end{aligned} \quad (7)$$

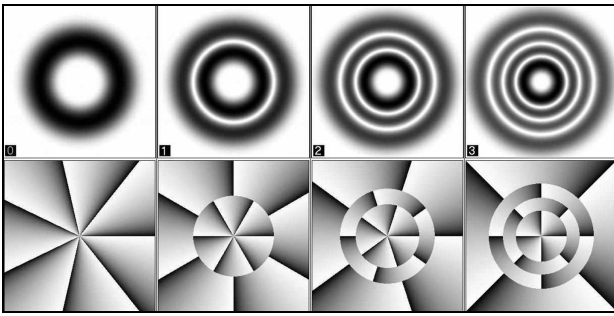


Рис. 1. Интенсивности и фазы пучков Лагерра–Гаусса  $LG_{n,7-n}$  при  $n = 0, 1, 2, 3$

Несмотря на свой «корявый» вид, формулы (7) представляют для нас большой интерес. И вот почему.

Найдём скалярные произведения при  $n \geq N$  и для  $n < N$ :

$$\iint S_N \bar{S}_N dx dy = ((-1)^{n-N})^2 (N!)^2 \times \iint LG_{N,n-N}(z, \bar{z}) \overline{LG_{N,n-N}(z, \bar{z})} dx dy, \quad (8)$$

$$\iint S_N^1 \bar{S}_N^1 dx dy = \frac{((-1)^{n-N})^2 2^{2N} (n!)^2}{2^{2n}} \times \iint LG_{n,N-n}(z, \bar{z}) \overline{LG_{n,N-n}(z, \bar{z})} dx dy.$$

Пользуясь формулами для скалярного произведения мод Лагерра–Гаусса [7], получим (**Приложение**):

$$\iint S_N \bar{S}_N dx dy = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n!(N!)^2}{2^{n-N} N!} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n!}{2^n} N! \cdot 2^N, \quad (9)$$

$$\iint S_N^1 \bar{S}_N^1 dx dy = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2^{2N} (N!) (n!)^2}{2^{N-n} (2^{2n}) n!} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n!}{2^n} N! \cdot 2^N.$$

Таким образом, скалярное произведение изменяется одинаково и в случае  $n \geq N$ , и при  $n < N$ . Это окажется весьма полезным для нас.

Из вышеприведённого следует, что все спиральные пучки в виде замкнутых кривых можно рассматривать как обобщение пучков Лагерра–Гаусса  $LG_{0,n}(x, y)$ . Эту аналогию можно продолжить и построить для каждой порождающей кривой семейство спиральных пучков, соответствующее полному семейству пучков Лагерра–Гаусса. Для этого в представлении (6) в качестве поля  $S_0(z, \bar{z})$  выберем  $n$ -квантованный спиральный пучок в форме произвольной порождающей кривой  $\zeta(t)$ . Тогда полученное поле будет иметь вид:

$$S_N(z, \bar{z} | \sqrt{n}\zeta_1) = \exp\left(\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) \frac{\partial^N}{\partial z^N} \left( \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) S(z, \bar{z} | \sqrt{n}\zeta_1) \right), \quad (10)$$

где  $\zeta(t)$  – квантованная кривая, такая, что площадь, ограниченная ею, равна  $\pi/2$ . Пучки (10) поворачиваются при распространении, как и исходный пучок  $S(z, \bar{z} | \sqrt{n}\zeta_1)$ , т. к. параметр его вращения  $\theta_0 = -1$ , и наследуют черты порождающей кривой. Примеры таких пучков для порождающей кривой в виде гипоциклоиды треугольного вида, аналогичные пучкам Лагерра–Гаусса, приведены на рис. 2. Интересно от-

метить, что, в отличие от пучков Лагерра–Гаусса (рис. 1), линии пониженной интенсивности уже не являются нулевыми линиями и данная структура интенсивности обеспечивается лишь изолированными нулями, имеющими достаточно сложный вид и «ими-тирующими» нулевые линии интенсивности.

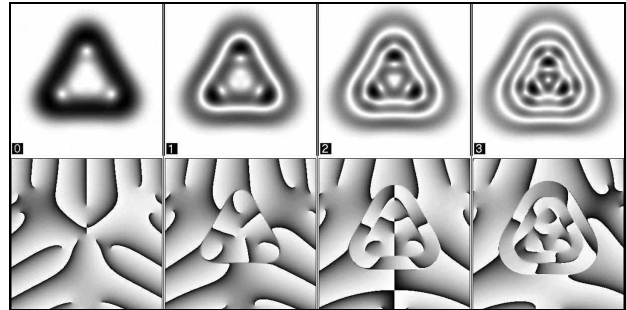


Рис. 2. Интенсивности и фазы спиральных пучков  $S_n(z, \bar{z})$  при  $n = 0, 1, 2, 3$

### 2. Условие квантования для производных пучков

В работе [5] получено условие квантования для пучков в виде замкнутых плоских кривых. Условие квантования является следующим:

$$S = \frac{1}{2} \pi \rho^2 \cdot n, n = 0, 1, 2, \dots, S - \text{площадь под кривой.}$$

Что можно сказать об условии квантования для дифференцированных пучков?

Условие независимости от начальной точки на порождающей кривой для  $N$ -пучков будет следующим.

Если сам пучок имеет вид:

$$S_N(z, \bar{z}) = \left( \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \right)^N S_0(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [0, T]) = \exp(-z\bar{z}) \int_0^T 2^N (\bar{\zeta} - \bar{z})^N \exp(2z\bar{\zeta}(t)) \times \exp\left(-\zeta(t)\bar{\zeta}(t) + \int_0^t (\bar{\zeta}\zeta'_t - \zeta\bar{\zeta}'_t) dt\right) |\zeta'_t| dt, \quad (11)$$

то условие независимости от начальной точки на кривой тогда можно записать:

$$|S_N(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [0, T])|^2 = |S_N(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [a, T+a])|^2. \quad (12)$$

Или:

$$\exp(i\Phi(z, \bar{z}, a)) S_N(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [a, T+a]) = \exp(i\Phi(z, \bar{z}, a)) S_N(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [0, T]). \quad (13)$$

Аналогично работе [5], продифференцируем (9) по  $a$ :

$$\exp(i\Phi(z, \bar{z}, a)) S_N(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [a, T+a]) \times \left( i\Phi'_a(z, \bar{z}, a) - (\bar{\zeta}(a)\zeta'(a) - \zeta(a)\bar{\zeta}'(a)) \right) + \exp\left[ i\Phi(z, \bar{z}, a) - z\bar{z} + 2z\bar{\zeta}(a) + \zeta(a)\bar{\zeta}(a) \right] \times 2^N (\bar{\zeta}(a) - \bar{z})^N \left\{ \exp\left( \int_0^T (\bar{\zeta}\zeta'_t - \zeta\bar{\zeta}'_t) dt \right) - 1 \right\} = 0. \quad (14)$$

Второе слагаемое имеет, вообще говоря, нуль порядка  $N$  в точке  $z = \zeta(a)$ .

В этом случае равенство возможно только тогда, когда и первая часть имеет такой же нуль. Но  $\Phi(z, \bar{z}, a)$  – вещественная функция.

Тогда функция  $\Phi(z, \bar{z}, a) - (\bar{\zeta}(a)\zeta'(a) - \zeta(a)\bar{\zeta}'(a))/i$  – тоже вещественная функция и должна иметь нуль порядка  $N$  в точке  $z = \zeta(a)$ , что невозможно. Поэтому:

$$\Phi(z, \bar{z}, a) = \frac{1}{i} \int_0^a (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') dt; \exp\left(\int_0^T (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') dt\right) = 1.$$

Другая возможность такова, что  $S_N(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [0, T])$  имеет нулевую линию:

$$S_N(z, \bar{z} | z = \zeta(v)) = 0, \text{ для всех } v \in [0, T].$$

Но в этом случае:

$$\begin{aligned} & S_N(z, \bar{z} | \zeta(t), t \in [0, T]) \times \\ & \times [i\Phi'_a(z, \bar{z}, a) - (\bar{\zeta}(a)\zeta'(a) - \zeta(a)\bar{\zeta}'(a))] + \\ & + \exp[i\Phi(z, \bar{z}, a)] \cdot \exp(-\zeta(v)\bar{\zeta}(v) - 2\zeta(v)\bar{\zeta}(a)) \times \\ & \times \exp(+3\zeta(a)\bar{\zeta}(a)) \cdot 2^N (\bar{\zeta}(a) - \bar{\zeta}(v))^N \equiv 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Однако при  $a \neq v_0$  второе слагаемое не нуль. Поэтому  $\Phi(z, \bar{z}, a) = (1/i) \int_0^a (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') dt$  и  $S = (1/2)\pi n$ , где  $S$  – площадь под  $\zeta(v)$  и  $n_1 = n - N$ , где  $n_1$  – количество нулей внутри  $\zeta(v)$ .

### 3. Угловой момент $N$ -дифференцированных пучков

Мы получили формулы (9) для скалярного произведения  $N$ -дифференцированных пучков в виде окружностей. Очевидно, что всё остаётся справедливым и для произвольного спирального пучка, т.к. он суперпозиция пучков вида  $z^n \exp(-z\bar{z})$ . Тогда, пользуясь формулой для углового момента спирального пучка:

$$L(S) = \frac{\sum_n \frac{\pi}{2} \frac{n!}{2^n} n |C_n|^2}{\sum_n \frac{\pi}{2} \frac{n!}{2^n} |C_n|^2}, \tag{16}$$

получим:

$$\begin{aligned} L(S_N) &= \frac{\sum_n \frac{\pi}{2} \frac{n!}{2^n} 2^N n N! |C_n|^2}{\sum_n \frac{\pi}{2} \frac{n!}{2^n} 2^N N! |C_n|^2} - \\ &= \frac{\sum_n \frac{\pi}{2} \frac{n!}{2^n} 2^N N! |C_n|^2 \cdot N}{\sum_n \frac{\pi}{2} \frac{n!}{2^n} 2^N N! |C_n|^2} = L(S_0) - N. \end{aligned} \tag{17}$$

### 4. Астигматическое преобразование $N$ -дифференцированных пучков

Пусть  $S_n$  –  $N$ -дифференцированный пучок. Воспользуемся формулами (7) и результатами, например, [6]. Тогда легко получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-i(x\xi + y\eta) + \frac{2i\xi\eta}{\rho^2}\right) \times \\ & \times S_N(\xi + i\eta, \xi - i\eta) d\xi d\eta = \\ & = \frac{\pi\rho^2}{\sqrt{2}} \left(\frac{i}{\rho}\right)^N \exp\left(-\frac{i\rho^2 xy}{4} - \frac{\rho^2 x^2}{8}\right) \times \\ & \times h(\rho y | \zeta) H_N(x), \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \text{где } h(\rho y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\rho^2 y^2}{8}\right) \times \\ & \times \int_0^T \exp(-t^2) f\left(\frac{\rho y}{2} + it\right) dt. \end{aligned} \tag{19}$$

Последнее справедливо в силу известного представления полиномов Эрмита:

$$H_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) (y + it)^n dt. \tag{20}$$

Таким образом, как легко видеть, вся информация о структуре пучка содержится в функции  $h(\rho y)$ , являющейся одномерной, и, таким образом, астигматическое преобразование осуществляет своеобразное кодирование спирального пучка.

### Заключение

Таким образом, рассмотрено обобщение спиральных пучков в виде замкнутых кривых посредством действия на них оператора рождения, что было ранее (и другими авторами) сделано для обычных пучков Лагерра-Гаусса.

Показано, что при этом модифицируется условие квантования, амплитуда пучков, их скалярное произведение, а также угловой момент и астигматическое преобразование. Полученные результаты представляют интерес для специалистов по оптике Гауссовых пучков, микроманипулированию и беспроводной передаче информации.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ.

### Приложение

В связи с тем, что целая функция всегда представима в виде своего ряда Тейлора по степеням  $z$ , достаточно рассмотреть случай  $f(z) = z^n$ . Пусть  $n \geq N$ , тогда:

$$\begin{aligned} S_N &= \left(\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\right)^N S_0 = e^{-z\bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial z} - 2\bar{z}\right)^N \cdot z^n = \\ &= e^{-z\bar{z}} \sum_{l=0}^N \binom{N}{l} (-2\bar{z})^{N-l} \frac{n!}{(n-l)!} z^{n-l} = \\ &= e^{-z\bar{z}} \sum_{l=0}^N \frac{N!}{(N-l)!} (-2\bar{z})^{N-l} \frac{n!}{(n-l)!} z^{n-l} = \\ &= e^{-z\bar{z}} \sum_{l=0}^N \binom{n}{l} (-2\bar{z})^{N-l} \frac{N!}{(N-l)!} z^{n-l}. \end{aligned} \tag{21}$$

Для случая  $n < N$ , соответственно, получим:

$$S_N = e^{-z\bar{z}} \sum_{l=0}^N (-2z)^{N-l} \frac{N!}{(N-l)!} z^{n-l}. \tag{22}$$

С другой стороны, справедливы соотношения: [6]

$$\begin{aligned} (-1)^{n+N} e^{z\bar{z}} \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} \frac{\partial^N}{\partial z^N} e^{-2z\bar{z}} &= \\ &= \begin{cases} (-1)^N 2^n N! LG_{N,n-N}(z, \bar{z}), & n \geq N, \\ (-1)^n 2^N n! LG_{n,N-n}(z, \bar{z}), & n < N. \end{cases} \end{aligned} \tag{23}$$

Произведём непосредственное дифференцирование в левой части. Это даёт:

$$\begin{aligned} &(-1)^N 2^N n! LG_{N,n-N}(z, \bar{z}) = \\ &= (-1)^{n+N} e^{z\bar{z}} \sum_{l=n-N}^n \binom{n}{l} (-2)^N (\bar{z}^N)^{(n-l)} (-2)^l z^l e^{-2z\bar{z}} = \\ &= (n-l = k) = \\ &= (-1)^{n+N} e^{-z\bar{z}} \sum_N^0 \binom{n}{k} (-2)^{N-k} (\bar{z}^N)^{(k)} (-2)^k z^{n-k} = \\ &= (-1)^{n+N} e^{-z\bar{z}} \sum_0^N \binom{n}{k} (-2^{N-k} \bar{z}^N)^{(k)} z^{n-k} \frac{N!}{(N-k)!}, \end{aligned} \tag{24}$$

где  $\binom{k}{k}$  –  $k$ -я производная.

Отсюда

$$(-1)^n 2^n S_N(z, \bar{z}) = (-1)^N 2^n N! LG_{N,n-N}(z, \bar{z}), \quad n \geq N.$$

Соответственно, для  $n < N$  получим:

$$S_N = (-1)^n e^{-z\bar{z}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2\bar{z})^{N-k} z^{n-k} \frac{N!}{(N-k)!} 2^n \tag{25}$$

и  $(-1)^n \frac{2^N}{2^n} n! LG_{n,N-n}(z, \bar{z}) = (-1)^N S_N(z, \bar{z}). \tag{26}$

Из последних четырёх соотношений легко получить (7, 9).

**Литература**

1. **Abramochkin, E.** Product of three Airy beams / E. Abramochkin, E. Razueva // Optics Letters. – 2011. – V. 36(19). – P. 3732-3734. – ISSN 0146-9592.

2. **Dennis, M.** Propagation-invariant beams with quantum pendulum spectra: from Bessel beams to Gaussian beam-beams / M. Dennis, J. Ring // Optics Letters. – 2013. – V. 38(17). – P. 3325-3328. – ISSN 0146-9592.

3. **Abramochkin, E.** Spiral-type beams / E. Abramochkin, V. Volostnikov // Optics Communications. – 1993. – V. 102(3-4). – P. 336. – ISSN 0030-4018.

4. **Abramochkin, E.** Spiral-type beams: optical and quantum aspects/ E. Abramochkin, V. Volostnikov // Optics Communications. – 1996. – V. 125(4-6). – P. 302-323. – ISSN 0030-4018.

5. **Абрамочкин, Е.Г.** Спиральные пучки света / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников // Успехи физических наук. – 2004. – Т. 174. – С. 1273-1300. – ISSN 0042-1294.

6. **Абрамочкин, Е.Г.** Современная оптика гауссовых пучков / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников. – М.: Физматлит, 2010. – 184 с.

7. **Переломов, А.М.** Обобщённые когерентные состояния и их применения / А.М. Переломов.– М.: Наука, 1997. – 273 с.

**References**

1. **Abramochkin, E.** Product of three Airy beams / E. Abramochkin, E. Razueva// Optics Letters. – 2011. – V. 36(19). – P. 3732-3734. – ISSN 0146-9592.

2. **Dennis, M.** Propagation-invariant beams with quantum pendulum spectra: from Bessel beams to Gaussian beam-beams / M. Dennis, J. Ring // Optics Letters. – 2013. – V. 38(17). – P. 3325-3328. – ISSN 0146-9592.

3. **Abramochkin, E.** Spiral-type beams / E. Abramochkin, V. Volostnikov // Optics Communications. – 1993. – V. 102(3-4). – P. 336. – ISSN 0030-4018.

4. **Abramochkin, E.** Spiral-type beams: optical and quantum aspects / E. Abramochkin, V. Volostnikov // Optics Communications. – 1996. – V. 125(4-6). – P. 302-323. – ISSN 0030-4018.

5. **Abramochkin, E.G.** Spiral Light Beams / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov // Physics-Uspexhi. – 2004. – V. 47. – P. 1177-1203. – ISSN 1063-7869.

6. **Abramochkin, E.G.** Modern Optics of Gaussian Beams / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov. – Moscow: “Fizmatlit” Publisher, 2010. – 184 p. – (In Russian).

7. **Perelomov, A.M.** Generalized Coherent States and their Applications / A.M. Perelomov. – Moscow: “Nauka” Publisher, 1997. – 273 p. – (In Russian).

**SPIRAL LIGHT FIELDS IN THE FORM OF CLOSED CURVES AS GENERALIZATION OF LAGUERRE-GAUSSIAN BEAMS**

V.G. Volostnikov

Samara Branch of P.N.Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Samara State Aerospace University

**Abstract**

Spiral beams as the generalization of the known Laguerre-Gaussian beams are researched in the work. It is demonstrated that similar to the Laguerre-Gaussian beams, this generalization can also be described with the operation of a certain differentiation operator. A number of these beams parameters are estimated, such as quantization conditions, amplitude, scalar product and angular momentum, as well as the result of their astigmatic transformation. The results obtained could also be of interest in the sphere of laser technologies and laser micromanipulation.

**Key words:** coherent optics, light spiral beams.

*Сведения об авторе*

**Волостников Владимир Геннадьевич**, 1951 года рождения, в 1975 году окончил Московский физико-технический институт по специальности «Квантовая электроника», работает главным научным сотрудником в Самарском филиале федерального государственного бюджетного учреждения науки Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук и профессором в Самарском государственном аэрокосмическом университете имени академика С.П. Королёва. Область научных интересов: дифракционная оптика, фазовая проблема в оптике, оптика Гауссовых пучков.

E-mail: [coherent@fian.smr.ru](mailto:coherent@fian.smr.ru).

**Vladimir Gennad'evich Volostnikov** (b. 1951) graduated from the Moscow Institute of Physics and Technology in 1975, specialty "Physical and Quantum Electronics". Currently he works as the Chief researcher at the Samara Branch of P.N. Lebedev Physical Institute, and as the professor at S.P. Korolyov Samara State Aerospace University. The area of his scientific interests covers diffraction optics, phase retrieval, Gaussian beam optics.

*Поступила в редакцию 11 июня 2014 г*