

## ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА, ОПТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

## О ДИФРАКЦИИ ОПТИЧЕСКОГО ПУЧКА НА БРЭГГОВСКОЙ РЕШЁТКЕ С ДЕФЕКТНЫМ СЛОЕМ

Быков Д. А., Досколович Л. Л.

Институт систем обработки изображений РАН,

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва  
(национальный исследовательский университет) (СГАУ)

## Аннотация

Рассмотрена дифракция трёхмерного оптического пучка на резонансной многослойной структуре (брэгговской решётке с дефектным слоем). Показано, что указанная структура позволяет вычислять пространственный оператор Лапласа при отражении нормально падающего оптического пучка. Представленные результаты численного моделирования показывают высокое качество вычисления оператора Лапласа. Кроме того, описан вид преобразования пучка при прохождении через структуру.

**Ключевые слова:** оптический пучок, брэгговская решётка, резонанс, оператор Лапласа.

## Введение

Оптические устройства, осуществляющие заданные временные и пространственно-временные преобразования оптических сигналов, представляют большой интерес для широкого спектра приложений, включающих сверхбыструю оптическую обработку информации и аналоговые оптические вычисления. Важнейшими операциями аналоговой обработки оптических сигналов являются операции временного и пространственного дифференцирования. Под временным дифференцированием оптического импульса понимается дифференцирование огибающей импульса. Под пространственным дифференцированием понимается дифференцирование пространственного профиля светового пучка. Для выполнения временного дифференцирования были предложены различные варианты брэгговских решёток [1–4] и резонансных дифракционных решёток [5, 6]. Пространственное дифференцирование двумерных пучков впервые было рассмотрено в работе [7] в 2014 году. В указанной работе было показано, что брэгговская решётка с дефектным слоем (БРДС, англ. PSBG, Phase shifted Bragg grating) позволяет вычислить первую производную профиля падающего пучка при наклонном падении и производную второго порядка при нормальном падении. В то же время в работе [7] не исследовались пространственные преобразования трёхмерных пучков, которые могут быть реализованы с помощью БРДС.

В настоящей работе продемонстрирована возможность оптического вычисления оператора Лапласа в пространственных координатах при отражении от БРДС. Следует отметить, что в настоящее время для реализации данной операции используются сложные методы, основанные на вычитании двух голограмм, зарегистрированных на двух различных расстояниях или при двух различных длинах волн [8, 9]. Кроме того, в настоящей работе исследуется преобразование оптического пучка при прохождении через БРДС.

## 1. Дифракция трёхмерного пучка на системе слоёв

Рассмотрим трёхмерный пучок, нормально падающий на многослойную структуру (рис. 1). Пред-

ставим его в виде углового спектра, в виде суперпозиции ТЕ- и ТМ-поляризованных плоских волн разных направлений. Поскольку ось  $z$  перпендикулярна рассматриваемой системе слоёв, то плоскости падения плоских волн содержат ось  $z$ . Соответственно, у ТЕ-волн вектор электрического поля перпендикулярен оси  $z$  ( $E_z \equiv 0$ ), а у ТМ-волн вектор магнитного поля перпендикулярен оси  $z$  ( $H_z \equiv 0$ ).

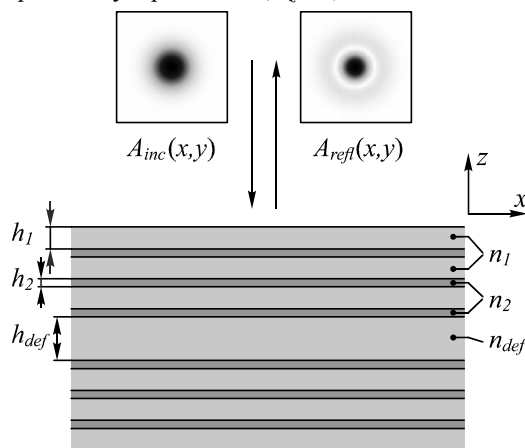


Рис. 1. Брэгговская решётка с дефектным слоем. Слева изображено поперечное распределение поля падающего пучка, справа – отражённого

Предполагая, что зависимость от времени описывается функцией  $\exp(-i\omega t)$ , из уравнений Максвелла несложно получить уравнения плоских ТЕ- и ТМ-волн в виде

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_{\text{ТЕ,ТМ}}(\alpha, \beta) \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $\Phi(\mathbf{r}) = [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \ \mathbf{H}(\mathbf{r})]^T$  – вектор-столбец из компонент электрического ( $\mathbf{E} = [E_x \ E_y \ E_z]$ ) и магнитного ( $\mathbf{H} = [H_x \ H_y \ H_z]$ ) полей,  $\mathbf{p} = (\alpha, \beta, \gamma)$  – волновой вектор, где  $\gamma = \pm \sqrt{k_0^2 n_{\text{sup}}^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}$ ,  $k_0 = 2\pi/\lambda = \omega/c$  – волновое число,  $\lambda$  – длина волны,  $n_{\text{sup}}$  – показатель преломления среды,  $\Phi_{\text{ТЕ}} = (\alpha, \beta)$  и  $\Phi_{\text{ТМ}} = (\alpha, \beta)$  – векторы следующего вида:

$$\Phi_{\text{TM}}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{bmatrix} -\alpha\gamma \\ -\beta\gamma \\ \alpha^2 + \beta^2 \\ k_0\beta\epsilon \\ -k_0\alpha\epsilon \\ 0 \\ -k_0\beta \\ k_0\alpha \\ 0 \\ -\alpha\gamma \\ -\beta\gamma \\ \alpha^2 + \beta^2 \end{bmatrix}; \quad (2)$$

$$\Phi_{\text{TE}}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{bmatrix} -k_0\beta \\ k_0\alpha \\ 0 \\ -\alpha\gamma \\ -\beta\gamma \\ \alpha^2 + \beta^2 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что знаки «±» в компоненте  $\gamma$  волнового вектора определяют волны, идущие в положительном и отрицательном направлениях оси  $z$  соответственно. Уравнения (2) не определены в точке  $\alpha = \beta = 0$ . Будем считать, что в данной точке  $\Phi_{\text{TE, TM}}(0, 0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \Phi_{\text{TE, TM}}(\alpha, 0)$ .

В общем случае падающий световой пучок может быть представлен в виде суммы ТЕ- и ТМ-пучков, соответствующих суперпозициям ТЕ- и ТМ-плоских волн, распространяющихся в отрицательном направлении оси  $z$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{inc}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{A}_{\text{inc, TE}}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_{\text{inc, TM}}(\mathbf{r}) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint G_{\text{TE}}(\alpha, \beta) \Phi_{\text{TE}}(\alpha, \beta) \exp(i\mathbf{pr}) d\alpha d\beta + \\ &+ \frac{1}{4\pi^2} \iint G_{\text{TM}}(\alpha, \beta) \Phi_{\text{TM}}(\alpha, \beta) \exp(i\mathbf{pr}) d\alpha d\beta = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint \mathbf{G}_{\text{inc}}(\alpha, \beta) \exp(i\mathbf{pr}) d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mathbf{A}_{\text{inc}}(\mathbf{r}) = [\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}) \ \mathbf{H}_{\text{inc}}(\mathbf{r})]^T$  – вектор-столбец из компонент поля падающего пучка,  $G_{\text{TE}}(\alpha, \beta)$  и  $G_{\text{TM}}(\alpha, \beta)$  – пространственные спектры ТЕ- и ТМ-пучков,  $\mathbf{G}_{\text{inc}}(\alpha, \beta)$  – пространственный спектр компонент падающего поля, который задаётся следующим выражением:

$$\mathbf{G}_{\text{inc}}(\alpha, \beta) = G_{\text{TE}}(\alpha, \beta) \Phi_{\text{TE}}(\alpha, \beta) + G_{\text{TM}}(\alpha, \beta) \Phi_{\text{TM}}(\alpha, \beta). \quad (4)$$

За счёт выбора спектров  $G_{\text{TE}}(\alpha, \beta)$  и  $G_{\text{TM}}(\alpha, \beta)$  можно задать две произвольные компоненты падающего пучка в плоскости  $z = 0$ . В качестве примера рассмотрим пучок, поляризованный по оси  $x$  [10, 11]. В этом случае положим:

$$\begin{aligned} E_{x, \text{inc}}(x, y, 0) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint G_x(\alpha, \beta) \exp(i(\alpha x + \beta y)) d\alpha d\beta; \\ E_{y, \text{inc}}(x, y, 0) &\equiv 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $G_x(\alpha, \beta)$  – пространственный спектр  $E_x$ -компоненты. Из (2), (3), (5) несложно получить выражения для функций  $G_{\text{TE}}(\alpha, \beta)$ ,  $G_{\text{TM}}(\alpha, \beta)$ , задающих разложение линейно-поляризованного пучка по ТЕ- и ТМ-волнам:

$$\begin{aligned} G_{\text{TE}}(\alpha, \beta) &= -\frac{\beta G_x(\alpha, \beta)}{k_0 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}; \\ G_{\text{TM}}(\alpha, \beta) &= -\frac{\alpha G_x(\alpha, \beta)}{\gamma \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Используя определение  $\Phi_{\text{TE, TM}}$  в точке  $\alpha = \beta = 0$ , получим  $G_{\text{TE}}(0, 0) = 0$ ,  $G_{\text{TM}}(0, 0) = -\frac{G_x(0, 0)}{k_0 \sqrt{\epsilon}}$ .

Для гауссовского пучка

$$E_{x, \text{inc}}(x, y, 0) = \exp\left\{-\frac{(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}\right\}$$

и функция  $G_x(\alpha, \beta)$  в (5), (6) принимает вид:

$$G_x(\alpha, \beta) = 2\pi\sigma^2 \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right\}. \quad (7)$$

В дальнейшем будем считать, что падающий на многослойную структуру световой пучок определён уравнениями (3)–(6). При этом отражённый пучок принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{refl}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{A}_{\text{refl, TE}}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_{\text{refl, TM}}(\mathbf{r}) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint G_{\text{TE}}(\alpha, \beta) \Phi_{\text{TE}}(\alpha, \beta) R_{\text{TE}}(\alpha, \beta) \exp(i\mathbf{pr}) d\alpha d\beta + \\ &+ \frac{1}{4\pi^2} \iint G_{\text{TM}}(\alpha, \beta) \Phi_{\text{TM}}(\alpha, \beta) R_{\text{TM}}(\alpha, \beta) \exp(i\mathbf{pr}) d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $R_{\text{TE}}(\alpha, \beta)$ ,  $R_{\text{TM}}(\alpha, \beta)$  – коэффициенты отражения ТЕ- и ТМ-плоских волн. Отметим, что в рассматриваемом случае многослойной структуры коэффициенты отражения зависят только от угла между нормалью и волновым вектором, то есть коэффициенты отражения можно рассматривать как функции от проекции волнового вектора на плоскость структуры:

$$\begin{aligned} R_{\text{TE}}(\alpha, \beta) &= R_{\text{TE}}(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, 0); \\ R_{\text{TM}}(\alpha, \beta) &= R_{\text{TM}}(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, 0). \end{aligned} \quad (9)$$

Согласно (9), в дальнейшем коэффициенты отражения будем считать функциями одного аргумента ( $R_{\text{TE, TM}}(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) = R_{\text{TE, TM}}(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, 0)$ ). Из формулы

(8) следует, что ТЕ- и ТМ-компоненты  $\mathbf{A}_{\text{refl, TE}}(x, y, 0)$ ,  $\mathbf{A}_{\text{refl, TM}}(x, y, 0)$  отражённого поля в плоскости  $z = 0$  соответствуют результату преобразования компонент падающего поля  $\mathbf{A}_{\text{inc, TE}}(x, y, 0)$ ,  $\mathbf{A}_{\text{inc, TM}}(x, y, 0)$  линейными системами с передаточными функциями

$$\begin{aligned} H_{\text{TE}}(\alpha, \beta) &= R_{\text{TE}}(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \quad \text{и} \\ H_{\text{TM}}(\alpha, \beta) &= R_{\text{TM}}(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}). \end{aligned}$$

Отметим, что коэффициенты отражения  $R_{\text{TE}}(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$ ,  $R_{\text{TM}}(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$  являются чётными функциями аргумента  $\xi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ . Вследствие этого передаточные функции  $H_{\text{TE}}(\alpha, \beta)$ ,

$H_{\text{TE, TM}}(\alpha, \beta)$  в первом приближении являются квадратичными.

**2. Преобразование пучка при отражении**

Пусть угловой спектр падающего пучка сосредоточен в области  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < \delta$ . Из (3), (8) легко видеть, что при условии

$$H_{\text{TE, TM}}(\alpha, \beta) \sim H_{\Delta}(\alpha, \beta) = (i\alpha)^2 + (i\beta)^2, \quad (10)$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < \delta$$

многослойная структура будет вычислять оператор

Лапласа  $\Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$  от падающего поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{refl, TE}}(x, y, 0) &\sim \Delta \mathbf{A}_{\text{inc, TE}}(x, y, 0); \\ \mathbf{A}_{\text{refl, TM}}(x, y, 0) &\sim \Delta \mathbf{A}_{\text{inc, TM}}(x, y, 0). \end{aligned} \quad (11)$$

Согласно (10), для вычисления оператора Лапласа необходимо, чтобы многослойная структура имела нулевое отражение при нормальном падении ( $R_{\text{TE, TM}}(0) = 0$ ). При этом с точностью до членов второго порядка  $H_{\text{TE, TM}}(\alpha, \beta) \sim R_{\text{TE, TM}}''(0) H_{\Delta}(\alpha, \beta)$ . Таким образом, величина второй производной  $R_{\text{TE, TM}}''(0)$  характеризует энергетическую эффективность вычисления оператора Лапласа. Для обеспечения большой величины второй производной  $R_{\text{TE, TM}}''(0)$  необходимо, чтобы коэффициент отражения быстро изменялся в окрестности нормального падения. Такой вид спектра отражения характерен для узкополосных спектральных фильтров, в частности, для БРДС [3, 4, 7].

БРДС позволяет получить нулевое отражение при заданном угле падения  $\theta_0$  (при  $\alpha = \alpha_0 = k_0 n_{\text{sup}} \sin(\theta_0)$ ) одновременно для ТЕ- и ТМ-поляризации плоской волны. БРДС состоит из двух симметричных брэгговских решёток (БР), разделённых дефектом (рис. 1). В простейшем случае слои БР имеют одинаковую оптическую толщину, а дефект – в два раза большую толщину:

$$\begin{aligned} \tilde{n}_1 h_1 &= \tilde{n}_2 h_2 = \lambda_B / 4; \\ \tilde{n} h_{\text{def}} &= \lambda_B / 2, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\tilde{n} = \sqrt{n^2 - \sin^2(\theta_0)}$ ,  $\tilde{n}_i = \sqrt{n_i^2 - \sin^2(\theta_0)}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $n_i, h_i$  – показатели преломления и толщины слоёв БР,  $n, h_{\text{def}}$  – показатель преломления и толщина дефектного слоя,  $\lambda_B$  – брэгговская длина волны. При выполнении условий (12) коэффициент отражения БР на длине волны  $\lambda_B$  и угле падения  $\theta_0$  обращается в ноль [4]. Отметим, что указанный ноль отражения расположен в центре первой запрещённой зоны брэгговской решётки. Появление нуля отражения имеет резонансную природу и связано с возбуждением мод, локализованных в дефектном слое.

Для коэффициента отражения как функции волнового числа можно записать резонансное представление [5]. Согласно (9), для многослойной структуры коэффициент отражения можно рассматривать как функцию только от компоненты  $\alpha$  волнового вектора ( $\beta \equiv 0$ ) при фиксированной поляризации (ТЕ- или ТМ-). Коэффициент отражения (пропускания) многослойной структуры с несколькими резонансами может быть представлен в виде суммы дробно-линейных функций [5]:

$$R(\alpha) \approx r + \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{\alpha - p_j}, \quad (13)$$

где  $r$  – нерезонансный коэффициент отражения, а  $p_j$  – комплексные константы распространения. Отметим, что величины  $r, b_j$  и  $p_j$  зависят от поляризации падающей волны. Согласно (13), для того чтобы коэффициент отражения (пропускания) был чётной функцией от  $\alpha$ , многослойная структура должна допускать существование двух собственных мод с константами распространения  $\pm p$ . Учитывая условие нулевого отражения при  $\alpha = \alpha_0 = k_0 n_{\text{sup}} \sin(\theta_0)$ , коэффициент отражения можно записать в виде:

$$\begin{aligned} R(\alpha) &\approx r - \frac{r(\alpha_0^2 - p^2)}{2p} \left( \frac{1}{\alpha - p} - \frac{1}{\alpha + p} \right) = \\ &= r \frac{\alpha^2 - \alpha_0^2}{\alpha^2 - p^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Представление (14) при  $\alpha_0 = 0$  позволяет записать передаточные функции  $H_{\text{TE, TM}}(\alpha, \beta)$  в виде:

$$\begin{aligned} H_{\text{TE, TM}}(\alpha, \beta) &= r_{\text{TE, TM}} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2 - p_{\text{TE, TM}}^2} = \\ &= \frac{r_{\text{TE, TM}}}{p_{\text{TE, TM}}^2} H_{\Delta}(\alpha, \beta) H_{\text{eff}}(\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$H_{\text{eff}}(\alpha, \beta) = \left( 1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{p_{\text{TE, TM}}^2} \right)^{-1}. \quad (16)$$

ПФ (15) представлена в виде произведения ПФ системы, реализующей вычисление оператора Лапласа, и сглаживающего фильтра  $H_{\text{eff}}(\alpha, \beta)$ . Таким образом, если в окрестности точки  $\alpha = \beta = 0$  функция  $H_{\text{eff}}(\alpha, \beta)$  слабо изменяется, то БРДС будет вычислять оператор Лапласа от ТЕ- и ТМ-компонент падающего пучка.

В качестве примера рассмотрим БРДС, состоящую из двух БР с  $N$  периодами и центрального дефектного слоя (общее число слоёв равно  $4N + 1$ ). Показатели преломления материалов слоёв, дефекта, материалов над и под структурой определим в виде:  $n_1 = 1,5$ ,  $n_2 = 2,25$ ,  $n = 1,5$ ,  $n_{\text{sub}} = n_{\text{sup}} = 1$ . Толщины слоёв БР определим из уравнения (12) при  $\lambda_B = 1500$  нм.

На рис. 2а приведены передаточные функции при отражении от БРДС, содержащих 13, 17 и 21 слой. Согласно рис. 2а, передаточные функции в окрестности значения  $\alpha=0$  имеют квадратичный вид, при этом пунктирными линиями показаны квадратичные ПФ, обеспечивающие точное вычисление оператора Лапласа. Отметим, что увеличение числа слоёв (периодов)

БР в общем случае приводит к уменьшению ширины «провала» коэффициента отражения и к уменьшению интервала, на котором ПФ является квадратичной (рис. 2а). Несложно показать, что уменьшение «провала» соответствует уменьшению величины  $|P_{TE, TM}^2|$  и, соответственно, увеличению функции  $H_{\text{eff}}(\alpha, \beta)$  в (15).

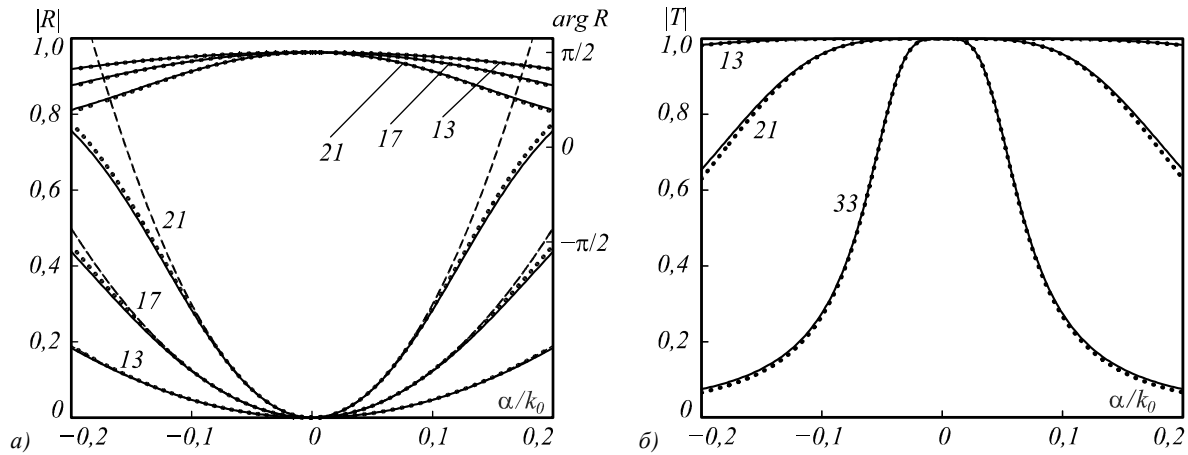


Рис. 2. (а) Амплитуды (снизу) и фазы (сверху) ПФ  $H_{TE, TM}(\alpha, 0) = R_{TE, TM}(\alpha)$  для БРДС из 13, 17 и 21 слоя. Шкала для амплитуд находится слева, для фаз – справа. Штриховыми линиями показаны ПФ идеальных фильтров, вычисляющих оператор Лапласа. (б) Амплитуды (снизу) передаточных функций  $H_{TE, TM}(\alpha, 0) = T_{TE, TM}(\alpha)$  для БРДС из 13, 21 и 33 слоёв.

Графики построены в зависимости от  $\alpha/k_0$  при  $|\alpha/k_0| \leq \sin(10^\circ)$ .

Сплошные линии соответствуют ПФ  $H_{TM}(\alpha, 0)$ , точечные линии – ПФ  $H_{TE}(\alpha, 0)$

Согласно (15), в общем случае оператор Лапласа от ТЕ- и ТМ-компонент падающего пучка вычисляется с разными весами  $w_{TE, TM} = \frac{r_{TE, TM}}{P_{TE, TM}^2}$ . В то же время графики на рис. 2а показывают, что в рассматриваемом случае коэффициенты отражения для ТЕ- и ТМ-плоских волн близки по величине. При условии  $R_{TE}(\alpha, \beta) \approx R_{TM}(\alpha, \beta)$  отражённый пучок (8) принимает вид:

$$A_{\text{refl}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \mathbf{G}_{\text{inc}}(\alpha, \beta) R_{TE}(\alpha, \beta) \exp(i\mathbf{pr}) d\alpha d\beta, \quad (17)$$

где  $\mathbf{G}_{\text{inc}}(\alpha, \beta)$  – пространственный спектр (4) падающего поля. Согласно (17), в рассматриваемом случае БРДС позволит оптически вычислить оператор Лапласа от всех компонент падающего поля.

Рассмотрим работу БРДС из 13 слоёв при гауссовском освещающем пучке, определённом уравнениями (5)–(7).

На рис. 3 показаны  $x$ -компонента падающего гауссовского пучка  $E_{x, \text{inc}}(x, y, 0) = \exp\left\{-\frac{(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}\right\}$  (полуширина пучка по уровню  $1/e^2$  амплитуды составляет  $2\sigma = 10$  мкм) и модуль  $x$ -компоненты отражённого пучка.

На рис. 3 также показаны профили падающего пучка  $E_{x, \text{inc}}(x, 0, 0)$ , отражённого пучка

$|E_{x, \text{refl}}(x, 0, 0)|$  и результата применения оператора Лапласа к падающему пучку  $|\chi \Delta E_{x, \text{inc}}(x, y, 0)|_{y=0}$ , где  $\chi = \Delta E_{x, \text{inc}}(0, 0, 0)/E_{x, \text{refl}}(0, 0, 0)$  – масштабный коэффициент. Сравнение профилей показывает, что отражённый пучок с высокой точностью соответствует оператору Лапласа от падающего пучка. Действительно, нормированная полуширина спектра падающего пучка составляет  $\delta/k_0 = 2/(\sigma k_0) = 0,095$ . Согласно рис. 2а, передаточные функции  $H_{TE, TM}(\alpha, 0)$  для БРДС из 13 слоёв при  $|\alpha/k_0| \leq 0,095$  по амплитуде имеют фактически совпадающий квадратичный вид по амплитуде, а изменения фазы не превышают  $\pi/40$ .

### 3. Преобразование пучка при прохождении

Наряду с преобразованием пучка при отражении, интерес представляет также преобразование пучка при пропускании. В частности, оценка передаточной функции и импульсной характеристики пропускающих спектральных фильтров позволит проводить моделирование гиперспектральных систем, основанных на линейно изменяющихся фильтрах [12–14].

Запишем резонансное представление вида (15) для коэффициента пропускания:

$$T(\alpha) \approx t + \frac{b}{\alpha^2 - p^2}. \quad (18)$$

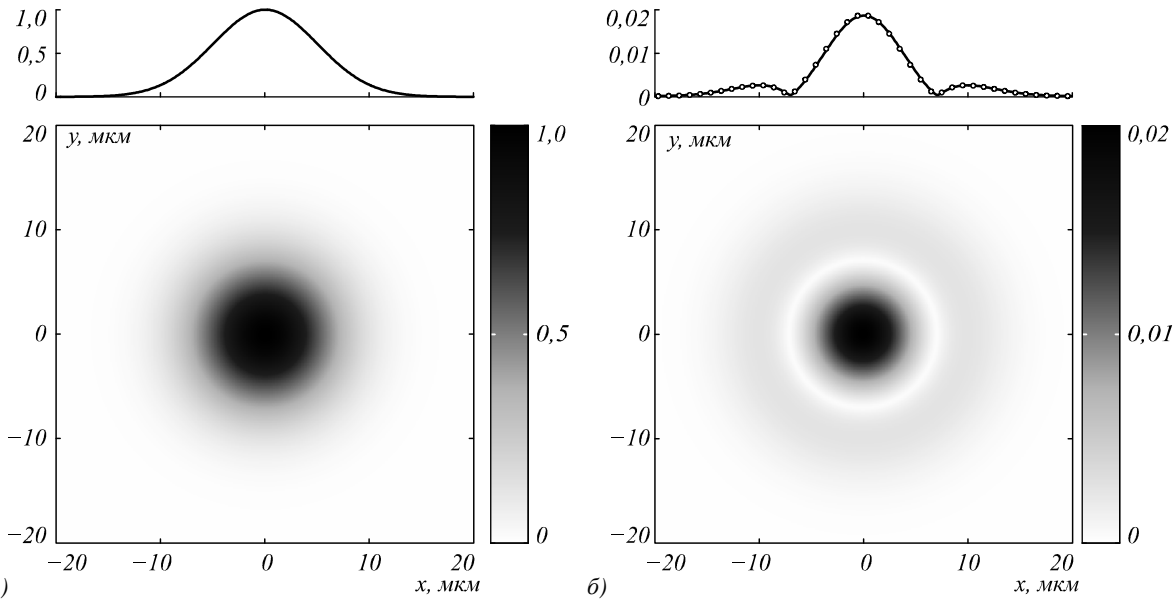


Рис. 3. (а) Полутоновое распределение (снизу) и профиль (сверху) модуля  $E_x$ -компоненты падающего гауссовского пучка; (б) полутоновое распределение (снизу) и профиль (сверху)  $E_x$ -компоненты отражённого пучка (околоностями показан точный результат применения оператора Лапласа к гауссовскому пучку)

Предполагая, что число слоёв брэгговской решётки велико, нерезонансный коэффициент пропускания  $t$  близок к нулю. Откуда имеем:

$$T(\alpha) \approx \frac{b}{\alpha^2 - p^2} = -\frac{b}{p^2} H_{\text{err}}(\alpha, \beta). \quad (19)$$

Соответствующие передаточные функции для двух поляризаций имеют вид

$$H_{\text{TE, TM}}(\alpha, \beta) = -\frac{b_{\text{TE, TM}}}{p_{\text{TE, TM}}^2} H_{\text{err}}(\alpha, \beta). \quad (20)$$

Таким образом, преобразование пучка при прохождении через спектральный фильтр имеет ту же природу, что и искажения при вычислении оператора Лапласа в отражении (см. (15)–(16)). На рис. 2б приведён модуль ПФ (коэффициента пропускания) для брэгговской решётки с дефектом, содержащей 13, 21 и 33 слоя. Из рисунка видно, что ПФ для двух поляризаций, как и в случае отражения, близки друг к другу.

Исследуем вид преобразования, осуществляемого ПФ (20). Для этого найдём импульсную характеристику как преобразование Фурье от (16):

$$h_{\text{err}}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} H_{\text{err}}(\alpha, \beta) \exp\{i(\alpha x + \beta y)\} dx dy. \quad (21)$$

Переходя в (21) к полярным координатам, получаем преобразование Ханкеля от функции вида  $(\rho^2 + z^2)^{-1}$ , которое вычисляется в аналитическом виде [15]:

$$\begin{aligned} h_{\text{err}}(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty H_{\text{err}}(\rho) \rho J_0(\rho r) d\rho = \\ &= -\frac{p^2}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\rho^2 + (ip)^2} \rho J_0(\rho r) d\rho = \\ &= -\frac{p^2}{2\pi} K_0(\sqrt{-p^2} r), \end{aligned} \quad (22)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $K_0(z)$  – модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка. При  $\text{Im } p > 0$  импульсная характеристика, соответствующая ПФ (20), принимает вид

$$h_T(x, y) = \frac{b}{2\pi} K_0(-ipr) = \frac{ib}{4} H_0^{(1)}(pr), \quad (23)$$

где  $H_0^{(1)}(z)$  – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка. Таким образом, преобразование поперечного профиля пучка при прохождении через БРДС можно описать двумерной свёрткой с функцией (23).

На рис. 4 представлена зависимость функции  $h_{\text{err}}(x, 0)$  от  $x$  при различных значениях  $p$ , соответствующих брэгговской решётке с дефектом. При этом рассмотрены случаи 13, 21 и 33 слоёв, соответствующие следующим значениям  $p$ :  $1,413 + 1,298i \text{ мкм}^{-1}$ ,  $0,550 + 0,534i \text{ мкм}^{-1}$ ,  $0,158 + 0,157i \text{ мкм}^{-1}$ . Отметим, что при  $r=0$  выражение (23) обращается в бесконечность. При увеличении числа слоёв уменьшается величина  $p$ , что приводит к медленному убыванию функции (23) на бесконечности. В пределе, когда  $|p| \ll 1$ , импульсная характеристика (23) приближается к постоянной величине. Таким образом, ПФ (16), (20) описывают уширение пучка, причём большее число периодов БР  $N$  соответствует меньшему значению  $|p|$ , что приводит к большему уширению пучка.

На рис. 5 приведён рассчитанный модуль  $E_x$ -компоненты прошедшего пучка. Также на рисунке приведён профиль прошедшего пучка  $|E_{x, \text{tr}}(x, 0, 0)|$  (непрерывная линия), в сравнении с профилем падающего пучка  $|\chi E_{x, \text{inc}}(x, 0, 0)|$  (пунктир), где  $\chi = \Delta E_{x, \text{tr}}(0, 0, 0) / E_{x, \text{inc}}(0, 0, 0)$  – масштабный коэф-

фициент. В соответствии с анализом импульсной характеристики при прохождении через брэгговскую решётку с дефектом происходит уширение пучка.

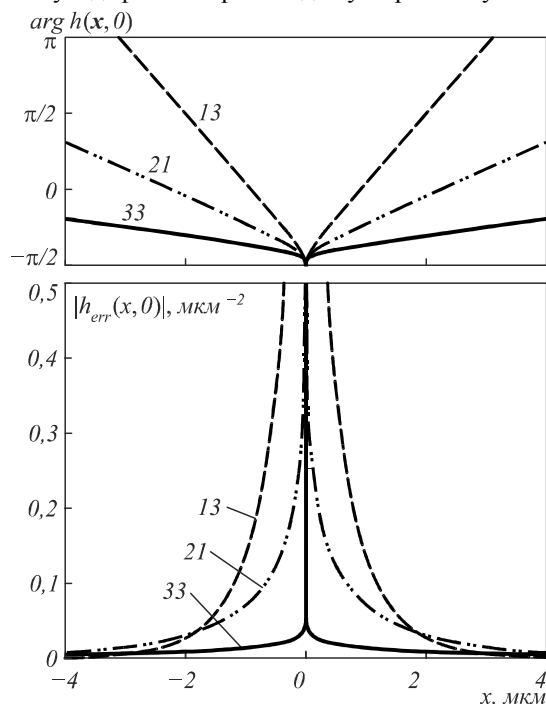


Рис. 4. Амплитуды (снизу) и фазы (сверху) импульсных характеристик брэгговских решёток с дефектом, содержащих 13, 21 и 33 слоя

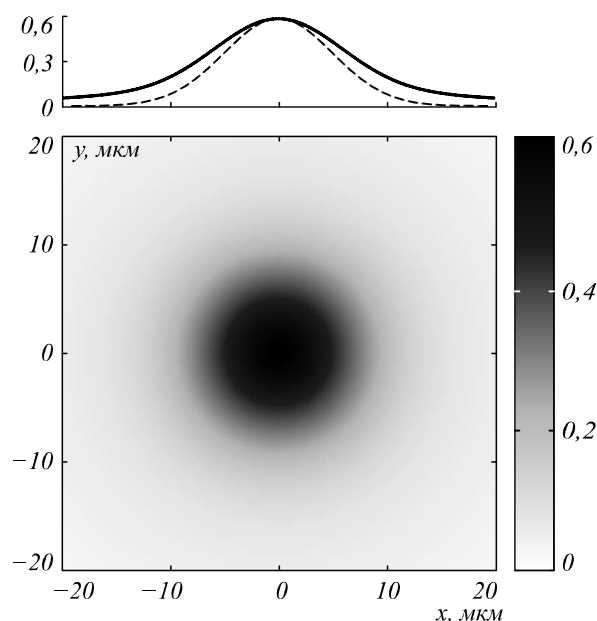


Рис. 5. Полутонное распределение (снизу) и профиль (сверху)  $E_x$ -компоненты прошедшего пучка. Пунктиром показан профиль падающего пучка

Отметим, что моделируемая структура имеет бесконечный поперечный размер. На практике же важно знать минимальный поперечный размер, при котором БРДС будет выполнять указанные преобразования. Данный размер можно оценить на основе анализа распределения электромагнитного поля, возникающего внутри структуры при дифракции на

ней оптического пучка. Расчёт с использованием метода матрицы рассеяния показывает, что на расстоянии  $4\sigma$  от центра пучка поле внутри структуры практически равно нулю (амплитуда на 3 порядка меньше максимальной амплитуды падающего пучка). Это означает, что поперечный размер структуры должен лишь незначительно превышать размер падающего пучка.

### Заключение

В работе показано, что БРДС позволяет оптически вычислить оператор Лапласа в пространственных координатах от компонент поля падающего пучка. Вычисление оператора Лапласа осуществляется в отражении при нормальном падении. При прохождении пучка через БРДС происходит уширение пучка. При этом пучок больше уширяется при прохождении через фильтры с более узкой полосой. Приведённое теоретическое описание позволяет оценить импульсную характеристику спектральных фильтров в гиперспектральных изображающих системах.

### Благодарности

Работа выполнена за счёт грантов Российского научного фонда (РНФ). Результаты по оптическому вычислению оператора Лапласа (пункты 1–2) получены в рамках гранта 14-19-00796. Результаты по оценке импульсной характеристики спектрального фильтра (пункт 3) получены в рамках гранта 14-31-00014.

### Литература

1. **Slavík, R.** Terahertz-bandwidth high-order temporal differentiators based on phase-shifted long-period fiber gratings / R. Slavík, Y. Park, M. Kulishov, J. Azaña // Optics Letters. – 2009. – V. 34, No. 20. – P. 3116–3118.
2. **Preciado, M. A.** Experimental demonstration of an optical differentiator based on a fiber Bragg grating in transmission / M. A. Preciado, X. Shu, P. Harper, K. Sugden // Optics Letters. – 2013. – V. 38, No. 6. – P. 917–919.
3. **Berger, N. K.** Temporal differentiation of optical signals using a phase-shifted fiber Bragg grating / N. K. Berger, B. Levit, B. Fischer, M. Kulishov, D. V. Plant, J. Azaña // Optics Express. – 2007. – V. 15, No. 2. – P. 371–381.
4. **Kulishov, M.** Design of high-order all-optical temporal differentiators based on multiple-phase-shifted fiber Bragg gratings / M. Kulishov, J. Azaña // Optics Express. – 2007. – V. 15 No. 10. – P. 6152–6166.
5. **Bykov, D. A.** Single-resonance diffraction gratings for time-domain pulse transformations: integration of optical signals / D. A. Bykov, L. L. Doskolovich, V. A. Soifer // Journal of the Optical Society of America A. – 2012. – V. 29, No. 8. – P. 1734–1740.
6. **Bykov, D. A.** Time-domain differentiation of optical pulses in reflection and in transmission using the same resonant grating / D. A. Bykov, L. L. Doskolovich, N. V. Golovastikov, V. A. Soifer // Journal of Optics. – 2013. – V. 15, No. 10. – P. 105703.
7. **Doskolovich, L. L.** Spatial differentiation of optical beams using phase-shifted Bragg grating / L. L. Doskolovich, D. A. Bykov, E. A. Bezus, V. A. Soifer // Optics Letters. – 2014. – V. 39, No. 5. – P. 1278–1281.

8. **Guo, C.-S.** Laplacian differential reconstruction of in-line holograms recorded at two different distances / C.-S. Guo, Q.-Y. Yue, G.-X. Wei, L.-L. Lu, S.-J. Yue // *Optics Letters*. – 2008. – V. 33, No. 17. – P. 1945–1947.
9. **Ryle, J. P.** Dual wavelength digital holographic Laplacian reconstruction / J. P. Ryle, D. Li, and J. T. Sheridan // *Optics Letters*. – 2010. – V. 35, No. 18. – P. 3018–3020.
10. **Sepke, S. M.** Exact analytical solution for the vector electromagnetic field of Gaussian, flattened Gaussian, and annular Gaussian laser modes / S. M. Sepke, D. P. Umstadter // *Optics Letters*. – 2006. – V. 31, No. 10. – P. 1447–1449.
11. **Zhou, G.** The analytical vectorial structure of a nonparaxial Gaussian beam close to the source // *Optics Express*. – 2008. – V. 16, No. 6. – P. 3504–3514.
12. **Emadi, A.** Linear variable optical filter-based ultraviolet microspectrometer / A. Emadi, H. Wu, G. de Graaf, P. Enoksson, J. H. Correia, R. Wolffenbuttel // *Applied Optics*. – 2012. – V. 51, No. 19. – P. 4308–4315.
13. **Emadi, A.** Design and implementation of a sub-nm resolution microspectrometer based on a Linear-Variable Optical Filter / A. Emadi, H. Wu, G. de Graaf, R. Wolffenbuttel // *Optics Express*. – 2012. – V. 20, No. 1. – P. 489–507.
14. **Казанский, Н. Л.** Моделирование гиперспектрометра на спектральных фильтрах с линейно-изменяющимися параметрами / Н. Л. Казанский, С. И. Харитонов, С. Н. Хонина, С. Г. Волоотовский, Ю. С. Стрелков // *Компьютерная оптика*. – 2014. – Т. 38, №2. – С. 256–270.
15. **Bracewell, R.** The Fourier transform and its applications. – 3rd ed. – New York: McGraw-Hill, 1999. – 640 p.

### References

1. **Slavík, R.** Terahertz-bandwidth high-order temporal differentiators based on phase-shifted long-period fiber gratings / R. Slavík, Y. Park, M. Kulishov, J. Azaña // *Optics Letters*. – 2009. – V. 34, No. 20. – P. 3116–3118.
2. **Preciado, M. A.** Experimental demonstration of an optical differentiator based on a fiber Bragg grating in transmission / M. A. Preciado, X. Shu, P. Harper, K. Sugden // *Optics Letters*. – 2013. – V. 38, No. 6. – P. 917–919.
3. **Berger, N. K.** Temporal differentiation of optical signals using a phase-shifted fiber Bragg grating / N. K. Berger, B. Levit, B. Fischer, M. Kulishov, D. V. Plant, J. Azaña // *Optics Express*. – 2007. – V. 15, No. 2. – P. 371–381.
4. **Kulishov, M.** Design of high-order all-optical temporal differentiators based on multiple-phase-shifted fiber Bragg gratings / M. Kulishov, J. Azaña // *Optics Express*. – 2007. – V. 15, No. 10. – P. 6152–6166.
5. **Bykov, D. A.** Single-resonance diffraction gratings for time-domain pulse transformations: integration of optical signals / D. A. Bykov, L. L. Doskolovich, V. A. Soifer // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2012. – V. 29, No. 8. – P. 1734–1740.
6. **Bykov, D. A.** Time-domain differentiation of optical pulses in reflection and in transmission using the same resonant grating / D. A. Bykov, L. L. Doskolovich, N. V. Golovastikov, V. A. Soifer // *Journal of Optics*. – 2013. – V. 15, No. 10. – P. 105703.
7. **Doskolovich, L. L.** Spatial differentiation of optical beams using phase-shifted Bragg grating / L. L. Doskolovich, D. A. Bykov, E. A. Bezus, V. A. Soifer // *Optics Letters*. – 2014. – V. 39, No. 5. – P. 1278–1281.
8. **Guo, C.-S.** Laplacian differential reconstruction of in-line holograms recorded at two different distances / C.-S. Guo, Q.-Y. Yue, G.-X. Wei, L.-L. Lu, S.-J. Yue // *Optics Letters*. – 2008. – V. 33, No. 17. – P. 1945–1947.
9. **Ryle, J. P.** Dual wavelength digital holographic Laplacian reconstruction / J. P. Ryle, D. Li, and J. T. Sheridan // *Optics Letters*. – 2010. – V. 35, No. 18. – P. 3018–3020.
10. **Sepke, S. M.** Exact analytical solution for the vector electromagnetic field of Gaussian, flattened Gaussian, and annular Gaussian laser modes / S. M. Sepke, D. P. Umstadter // *Optics Letters*. – 2006. – V. 31, No. 10. – P. 1447–1449.
11. **Zhou, G.** The analytical vectorial structure of a nonparaxial Gaussian beam close to the source // *Optics Express*. – 2008. – V. 16, No. 6. – P. 3504–3514.
12. **Emadi, A.** Linear variable optical filter-based ultraviolet microspectrometer / A. Emadi, H. Wu, G. de Graaf, P. Enoksson, J. H. Correia, R. Wolffenbuttel // *Applied Optics*. – 2012. – V. 51, No. 19. – P. 4308–4315.
13. **Emadi, A.** Design and implementation of a sub-nm resolution microspectrometer based on a Linear-Variable Optical Filter / A. Emadi, H. Wu, G. de Graaf, R. Wolffenbuttel // *Optics Express*. – 2012. – V. 20, No. 1. – P. 489–507.
14. **Kazanskiy, N. L.** Simulation of hyperspectrometer on spectral linear variable filters / N. L. Kazanskiy, S. I. Kharonov, S. N. Khonina, S. G. Volotovskiy, Yu. S. Strelkov // *Computer Optics*. – 2014. – V. 38, No 2. – P. 256–270. – (In Russian).
15. **Bracewell, R.** The Fourier transform and its applications. – 3rd ed. – New York: McGraw-Hill, 1999. – 640 p.

## ON THE DIFFRACTION OF AN OPTICAL BEAM BY A PHASE SHIFTED BRAGG GRATING

*D. A. Bykov, L. L. Doskolovich*

*Image Processing Systems Institute, Russian Academy of Sciences,  
Samara State Aerospace University*

### Abstract

Diffraction of a 3D optical beam from a resonant multilayer structure (phase-shifted Bragg grating) is considered. It is shown that the said structure enables optical computation of the spatial Laplace operator of the electromagnetic field components of the incident beam. The computation of the Laplacian is performed in reflection at normal incidence. Presented numerical results demonstrate high quality of the Laplace operator computation. The beam transformation performed in transmission is also investigated.

**Key words:** optical beam, phase shifted Bragg grating, optical resonance, Laplace operator.

*Сведения об авторах*

**Быков Дмитрий Александрович** в 2009 году с отличием окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (СГАУ) по специальности «Прикладная математика и информатика». Кандидат физико-математических наук (2011 г.), научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики Института систем обработки изображений РАН (ИСОИ РАН) и научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории прорывных технологий дистанционного зондирования Земли СГАУ. Области научных интересов: нанофотоника, магнитооптика, плазмоника, электромагнитная теория дифракции.

E-mail: [bykovd@gmail.com](mailto:bykovd@gmail.com).

**Dmitry Alexandrovich Bykov** graduated with honors (2009) from Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Mathematics and Computer Science. Candidate in Physics and Mathematics (2011). Researcher at the Breakthrough Technologies for Earth's Remote Sensing at SSAU. Currently he is a researcher in Diffractive Optics laboratory of the Image Processing Systems Institute of the RAS (IPSI RAS). His current research interests include nanophotonics, magneto-optics of nanostructured materials, plasmonics and electromagnetic diffraction theory.



**Досколович Леонид Леонидович** в 1989 году с отличием окончил Куйбышевский авиационный институт (КуАИ, ныне – Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва, СГАУ) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2001 год), профессор, работает главным научным сотрудником лаборатории дифракционной оптики Института систем обработки изображений РАН (ИСОИ РАН), профессором кафедры технической кибернетики СГАУ и ведущим научным сотрудником научно-исследовательской лаборатории прорывных технологий дистанционного зондирования Земли СГАУ. Специалист в области дифракционной оптики, лазерных информационных технологий, нанофотоники.

E-mail: [leonid@smr.ru](mailto:leonid@smr.ru).

**Leonid Leonidovich Doskolovich** graduated with honours (1989) from S.P. Korolyov Kuibyshev Aviation Institute (presently, Samara State Aerospace University, SSAU), majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths (2001) degree from Samara State Aerospace University. Leading researcher of the Image Processing Systems Institute of the RAS, professor at SSAU's Technical Cybernetics sub-department, the senior researcher at the Breakthrough Technologies for Earth's Remote Sensing laboratory at SSAU. His leading research interests include diffractive optics, laser information technologies, nanophotonics.

*Поступила в редакцию 20 октября 2014 г.*