

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ФОРМЫ ОПТИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО ЗАДАННОМУ ОТОБРАЖЕНИЮ

Л.Л. Досколович^{1,2}, Е.С. Андреев^{1,2}, М.А. Моисеев^{1,2}

¹ Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия,

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, Самара, Россия

Аннотация

Разработан новый метод восстановления отражающей (преломляющей) поверхности по заданному отображению, определяемому соотношениями между направлениями падающих и отраженных (преломленных) лучей. Метод основан на представлении поверхности в виде огибающей семейства параболоидов (случай отражающей поверхности) или эллипсоидов (случай преломляющей поверхности). Выбранное представление сводит задачу расчёта оптической поверхности к восстановлению функции по полному дифференциалу вне зависимости от используемой системы координат. Предложенный метод проиллюстрирован на примерах расчёта зеркал для формирования постоянного распределения интенсивности в квадратной области в дальней зоне. Результаты расчёта показывают, что предложенный метод позволяет получить распределение хорошего качества даже при невыполнении условия интегрируемости.

Ключевые слова: геометрическая оптика, восстановление поверхности, зеркало, распределение интенсивности.

Цитирование: Досколович, Л.Л. О восстановлении формы оптической поверхности по заданному отображению / Л.Л. Досколович, Е.С. Андреев, М.А. Моисеев // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 3. – С. 338-345. – DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-3-338-345.

Введение

Оптические элементы с поверхностями свободной формы играют ключевую роль в современных системах освещения. Задача расчёта отражающей или преломляющей оптической поверхности свободной формы из условия формирования заданного распределения освещённости или интенсивности относится к классу обратных задач неизображающей оптики. Данная задача является крайне сложной и сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка типа уравнения Монжа–Ампера [1, 2]. Аналитические решения данного уравнения получены только для задач, обладающих осевой симметрией, и для ряда задач формирования однопараметрических распределений освещённости [3–8]. В общем случае для решения данной обратной задачи используются различные численные и итерационные методы [1, 2, 9–15].

Одним из широко применяемых методов является метод, основанный на построении отображения между координатами лучей от источника и точками освещаемой области [12–17]. Как правило, направления лучей от источника задаются в сферических координатах $(u, \sigma) \in \Omega$, где Ω – область на единичной сфере, соответствующая телесному углу, в котором излучает источник, а точки освещаемой области D – в декартовых координатах. Методы [12–17] применяются для формирования заданной освещённости в дальней зоне, когда размерами оптической поверхности по сравнению с расстоянием до освещаемой области можно пренебречь. Действительно, только в этом случае можно задать соответствие между направлениями падающих и отраженных (преломленных) лучей. Поэтому далее для описания положения точек в области D будем использовать угловые координаты $(\beta, \gamma) \in D$. Для построения отображения

$\Omega \rightarrow D$ (или $D \rightarrow \Omega$) используется закон сохранения светового потока. При этом сама форма отображения выбирается в виде, позволяющем разделить переменные и определить соответствие. Наиболее часто применяется отображение, при котором «меридианы» (линии $\sigma = \sigma_0$ на единичной сфере в области Ω) переходят в азимутальные прямые $\gamma = \alpha\beta$ в освещаемой области D [13]. Данное отображение схематично показано на рис. 1, где область Ω представлена в полярных координатах, в которых зенитный угол u представляется через полярный радиус. Отображение на рис. 1 можно рассматривать как эвристическое обобщение отображений для задач с осевой симметрией. При отсутствии осевой симметрии такое отображение не удовлетворяет «условию интегрируемости». Под условием интегрируемости понимается возможность построения оптической поверхности, реализующей такое отображение.

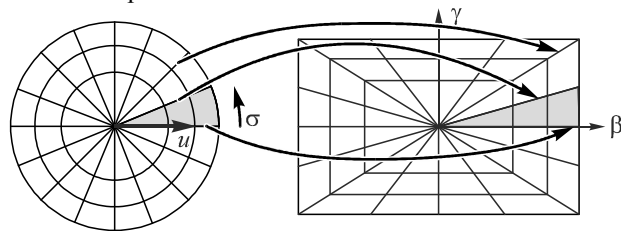


Рис. 1. Отображение $\Omega \rightarrow D$

Несмотря на это, рассмотренный вид отображения позволяет рассчитывать преломляющие оптические поверхности, формирующие освещаемые области заданной формы (прямоугольник, эллипс, ромб и т.п.), с приемлемой точностью. Метод обычно применяется для областей с небольшим аспектным отношением (отношением продольного и поперечного размеров), составляющим 1–2. При аспектном отношении 2 характерная ошибка метода (нормированное средне-

квадратичное отклонение формируемого распределения освещённости от заданного распределения) составляет 20–25 % [13]. Для улучшения качества формируемого распределения освещённости используются эвристические итерационные методы (iterative feedback modification) [13–15].

Для восстановления оптической поверхности по заданному отображению широко используется численный геометрический метод, основанный на последовательном построении поверхности из сегментов плоскостей [13, 17]. Нормальные вектора плоскостей определяются из условия преобразования падающих лучей в отраженные (преломленные) лучи, направления которых определяются построенным отображением. Данный метод имеет ряд недостатков. В частности, метод не содержит механизмов, позволяющих оптимально восстановить поверхность при невыполнении условия интегрируемости. Метод также требует большего количества точек для сложных поверхностей, при этом профили поверхности могут пересекаться.

В настоящей работе предложен новый метод построения отражающей (преломляющей) поверхности по заданному отображению. Метод основан на представлении оптической поверхности в виде огибающей двухпараметрического семейства поверхностей, каждая из которых преобразует сферический пучок от источника в плоский пучок с заданным направлением. Семейство состоит из параболоидов в случае отражающей поверхности или эллипсоидов (гиперболоидов) в случае преломляющей поверхности. В рамках такого подхода восстановление оптической поверхности сводится к восстановлению функции по полному дифференциалу. При этом условие интегрируемости приобретает простой вид и не зависит от выбора системы координат. При невыполнении условия интегрируемости метод включает итерационный подход к восстановлению поверхности, позволяющий минимизировать ошибку реализации заданного отображения.

1. Метод построения оптической поверхности

Рассмотрим метод сначала в задаче расчёта зеркала. Обозначим $(u, \sigma) \in \Omega$ и $(\beta, \gamma) \in D$ некоторые криволинейные координаты, в которых задаются падающие от источника лучи и отраженные от зеркала лучи. Пусть $\mathbf{e}(u, \sigma)$ и $\mathbf{p}(\beta, \gamma)$ – единичные вектора падающего и отраженного луча. Зеркало, преобразующее сферический пучок от источника в плоский пучок с фиксированным направлением $\mathbf{p}(\beta, \gamma)$, является параболоидом вращения с фокусом в точке расположения точечного источника (в начале координат) и направлением оси $\mathbf{p}(\beta, \gamma)$. В общем случае форма зеркала, для которого отраженные лучи заданы вектор-функцией $\mathbf{p}(\beta, \gamma)$, соответствует огибающей двухпараметрического семейства параболоидов по параметрам $(\beta, \gamma) \in D$. Огибающая задается уравнениями [11]:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\sigma, u; \beta, \gamma) &= \mathbf{e}(\sigma, u) \cdot l(\sigma, u; \beta, \gamma) = \\ &= \mathbf{e}(\sigma, u) \frac{2f(\beta, \gamma)}{1 - \varepsilon(\mathbf{e}(\sigma, u), \mathbf{p}(\beta, \gamma))} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial l(\sigma, u; \beta, \gamma)}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial l(\sigma, u; \beta, \gamma)}{\partial \gamma} = 0. \quad (2)$$

Уравнение (1) является уравнением параболоида, где $l(u, \sigma, \beta)$ – расстояние от источника до точки параболоида по направлению $\mathbf{e}(u, \sigma)$, $f(\beta, \gamma)$ – фокусное расстояние, $\mathbf{p}(\beta, \gamma)$ – единичный вектор оси параболоида, $\varepsilon = 1$. Параметр $\varepsilon = 1$ в (1) введен для удобства дальнейшего описания преломляющей поверхности.

По определению, огибающая поверхность касается каждого параболоида в некоторой точке. Поскольку направления нормалей огибающей поверхности и параболоида в точке касания совпадают, то отраженные лучи будут иметь заданные направления $\mathbf{p}(\beta, \gamma)$. Уравнения (2) могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(f)}{\partial \beta} &= -\frac{\varepsilon(\mathbf{e}, \partial \mathbf{p} / \partial \beta)}{1 - \varepsilon(\mathbf{e}, \mathbf{p})}, \\ \frac{\partial \ln(f)}{\partial \gamma} &= -\frac{\varepsilon(\mathbf{e}, \partial \mathbf{p} / \partial \gamma)}{1 - \varepsilon(\mathbf{e}, \mathbf{p})}. \end{aligned} \quad (3)$$

При заданной функции $f(\beta, \gamma)$ из уравнений (3) можно выразить переменные (u, σ) через (β, γ) или, наоборот, переменные (β, γ) через (u, σ) . Подставляя полученные выражения для (u, σ) (β, γ) в уравнение (1), получим уравнение зеркала в координатах (β, γ) $((u, \sigma))$.

Пусть некоторое заданное отображение $\Gamma: D \rightarrow \Omega$ описывается функциями $u = u(\beta, \gamma)$, $\sigma = \sigma(\beta, \gamma)$. В этом случае зеркало должно преобразовывать падающие лучи $\mathbf{e}(\beta, \gamma) = \mathbf{e}(u(\beta, \gamma), \sigma(\beta, \gamma))$ в отраженные лучи $\mathbf{p}(\beta, \gamma)$. Возможность такого преобразования определяется условием существования функции $f(\beta, \gamma)$, удовлетворяющей уравнениям (3), где вместо переменных (u, σ) подставлены функции $u = u(\beta, \gamma)$, $\sigma = \sigma(\beta, \gamma)$. Согласно (3), условие существования $f(\beta, \gamma)$ эквивалентно возможности восстановления функции $G(\beta, \gamma) = \ln f(\beta, \gamma)$ по полному дифференциалу. Данная задача имеет решение при выполнении условия

$$\frac{\partial^2 G(\beta, \gamma)}{\partial \beta \partial \gamma} \equiv \frac{\partial^2 G(\beta, \gamma)}{\partial \gamma \partial \beta}. \quad (4)$$

Последнее равенство соответствует условию интегрируемости (условию существования поверхности, реализующей отображение Γ). Согласно (3), $G(\beta, \gamma)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} G(\beta, \gamma) &= \int_L \frac{\partial G}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial G}{\partial \gamma} d\gamma = \\ &= -\int_L \frac{\varepsilon(\mathbf{e}, \partial \mathbf{p} / \partial \beta)}{1 - \varepsilon(\mathbf{e}, \mathbf{p})} d\beta + \frac{\varepsilon(\mathbf{e}, \partial \mathbf{p} / \partial \gamma)}{1 - \varepsilon(\mathbf{e}, \mathbf{p})} d\gamma, \end{aligned} \quad (5)$$

где L – некоторый контур интегрирования, соединяющий фиксированную точку (β_0, γ_0) и точку $(\beta, \gamma) \in D$. При этом поверхность (1) принимает вид:

$$\mathbf{S}(\beta, \gamma) = \mathbf{e}(\beta, \gamma) \frac{2 \exp(G(\beta, \gamma))}{1 - \varepsilon(\mathbf{e}(\beta, \gamma), \mathbf{p}(\beta, \gamma))}. \quad (6)$$

Если условие интегрируемости (4) выполняется, то интеграл (5) не зависит от вида контура интегрирования и поверхность (6) определяется однозначно. Если условие (4) не выполняется, то поверхность (6) будет реализовывать отображение Γ с некоторой ошибкой, причем величина ошибки будет зависеть от вида контура L . Определение оптимального контура интегрирования, обеспечивающего минимальную ошибку реализации отображения Γ , является сложной задачей. При невыполнении условия (4), вместо поиска оптимального контура интегрирования предлагается сформулировать задачу расчета функции $G(\beta, \gamma)$ как задачу минимизации функционала:

$$\mu(G) = \left\| \frac{\partial G}{\partial \beta} + \frac{\varepsilon(\mathbf{e}, \partial \mathbf{p} / \partial \beta)}{1 - \varepsilon(\mathbf{e}, \mathbf{p})} \right\| + \left\| \frac{\partial G}{\partial \gamma} + \frac{\varepsilon(\mathbf{e}, \partial \mathbf{p} / \partial \gamma)}{1 - \varepsilon(\mathbf{e}, \mathbf{p})} \right\| \rightarrow \min_G. \quad (7)$$

Функционал (7) обращается в ноль, когда функции $u = u(\beta, \gamma)$, $\sigma = \sigma(\beta, \gamma)$ удовлетворяют уравнениям (3). При параметрическом задании функции $G(\beta, \gamma)$ (например, в виде полинома) минимизация функционала (7) сводится к задаче минимизации функции многих переменных (коэффициентов полинома).

Рассмотрим далее случай отображения $\Gamma_1: \Omega \rightarrow D$, описываемого функциями $\beta = \beta(u, \sigma)$, $\gamma = \gamma(u, \sigma)$. В данном случае для восстановления поверхности зеркала запишем производные функции $G(\sigma, u) = \ln f(\sigma, u)$, где $f(\sigma, u) = f(\beta(\sigma, u), \gamma(\sigma, u))$, по переменным (σ, u) :

$$\begin{cases} \frac{\partial G(\sigma, u)}{\partial \sigma} = -\varepsilon \frac{(\mathbf{e}, \partial \mathbf{p} / \partial \beta)}{1 - \varepsilon(\mathbf{e}, \mathbf{p})} \frac{\partial \beta}{\partial \sigma} - \varepsilon \frac{(\mathbf{e}, \partial \mathbf{p} / \partial \gamma)}{1 - \varepsilon(\mathbf{e}, \mathbf{p})} \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma}, \\ \frac{\partial G(\sigma, u)}{\partial u} = -\varepsilon \frac{(\mathbf{e}, \partial \mathbf{p} / \partial \beta)}{1 - \varepsilon(\mathbf{e}, \mathbf{p})} \frac{\partial \beta}{\partial u} - \varepsilon \frac{(\mathbf{e}, \partial \mathbf{p} / \partial \gamma)}{1 - \varepsilon(\mathbf{e}, \mathbf{p})} \frac{\partial \gamma}{\partial u}. \end{cases} \quad (8)$$

Как и ранее, возможность реализации отображения Γ_1 определяется условием существования функции $G(\sigma, u) = \ln f(\sigma, u)$, удовлетворяющей уравнениям (8). Согласно (8), условие существования $f(\sigma, u)$ эквивалентно возможности восстановления функции $G(\sigma, u) = \ln f(\sigma, u)$ по полному дифференциалу:

$$\frac{\partial^2 G(\sigma, u)}{\partial \sigma \partial u} \equiv \frac{\partial^2 G(\sigma, u)}{\partial u \partial \sigma}. \quad (9)$$

Согласно (1), (8), поверхность, реализующая отображение $\beta = \beta(u, \sigma)$, $\gamma = \gamma(u, \sigma)$, имеет вид:

$$\mathbf{S}(\sigma, u) = \mathbf{e}(\sigma, u) \frac{2 \exp(G(\sigma, u))}{1 - \varepsilon(\mathbf{e}(\sigma, u), \mathbf{p}(\sigma, u))}, \quad (10)$$

где $G(u, \sigma) = \int_L (\partial G / \partial u) du + (\partial G / \partial \sigma) d\sigma$, где L – некоторый контур, соединяющий фиксированную точку и точку $(u, \sigma) \in \Omega$. Как и ранее, если условие интегрируемости (9) выполняется, то функция $G(u, \sigma)$ и поверхность (10) определяются однозначно.

Полученные соотношения несложно обобщить на случай преломляющей поверхности. Пусть преломляющая поверхность разделяет среды с показателями

преломления n_1 (среда расположения источника излучения) и n_2 . Несложно показать, что преломляющая поверхность, преобразующая сферический пучок от источника в плоский пучок с направлением $\mathbf{p}(\beta, \gamma)$, описывается эллипсоидом вращения (при $n_2 < n_1$) или гиперboloидом вращения (при $n_2 > n_1$) с первым фокусом в начале координат (в точке расположения точечного источника) [8]. Уравнение эллипсоида (гиперboloида) имеет вид [11]:

$$\mathbf{S}(\sigma, u; \beta, \gamma) = \mathbf{e}(\sigma, u) \frac{2f(\beta, \gamma)}{1 - n_{21}(\mathbf{e}(\sigma, u), \mathbf{p}(\beta, \gamma))}, \quad (11)$$

где $n_{21} = n_2 / n_1$ – эксцентриситет, $2f(\beta, \gamma)$ – фокальный параметр, $\mathbf{p}(\beta, \gamma)$ – направление главной оси. Соответственно, форма преломляющей поверхности, для которой преломленные лучи заданы вектор-функцией $\mathbf{p}(\beta, \gamma)$, описывается огибающей двухпараметрического семейства эллипсоидов (гиперboloидов) по параметрам $(\beta, \gamma) \in D$.

Поскольку уравнение (11) формально совпадает с уравнением (1) при $\varepsilon = n_{21}$, то полученные ранее уравнения для восстановления формы поверхности зеркала могут быть напрямую применены для преломляющей поверхности при $\varepsilon = n_{21}$.

2. Расчетные примеры

В известных работах для восстановления оптической поверхности по заданному отображению используется численный метод, основанный на последовательном построении поверхности из сегментов плоскостей [13, 17]. Данный метод может быть применен только для дальней зоны, когда размерами оптической поверхности по сравнению с расстоянием до освещаемой области можно пренебречь. В связи с этим рассмотрим применение метода, предложенного в первом пункте, на примере расчёта зеркала для формирования постоянного распределения интенсивности в квадратной области в дальней зоне.

Пусть зеркало определено в сферических координатах (σ, u) , где $\sigma \in [0, 2\pi)$ – полярный угол, $u \in [0, u_0)$ – зенитный угол. При этом $\Omega = [0, 2\pi) \times [0, u_0)$. Распределение интенсивности в дальней зоне определим в координатах $(\beta, \gamma) \in [-\beta_d, \beta_d] \times [-\gamma_d, \gamma_d]$, где β – угол в плоскости XOZ , отсчитываемый от оси z , а γ – угол между лучом и плоскостью XOZ . В этом случае направления падающего и отраженного лучей задаются векторами:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\sigma, u) &= (\cos(\sigma) \sin(u), \sin(\sigma) \sin(u), \cos(u)), \\ \mathbf{p}(\beta, \gamma) &= (\sin(\beta) \cos(\gamma), \sin(\gamma), \cos(\beta) \cos(\gamma)). \end{aligned} \quad (12)$$

Построим отображение $D \rightarrow \Omega$ с использованием закона сохранения светового потока. Для получения аналитических формул предположим, что интенсивность источника $I_0(\sigma, u)$, $(\sigma, u) \in \Omega$ и требуемое распределение интенсивности $I(\beta, \gamma)$, $(\beta, \gamma) \in D$ являются постоянными: $I_0(\sigma, u) = 1$, $I(\beta, \gamma) = I$. Элементы телесных углов в координатах (σ, u) и (β, γ) несложно получить в виде $d\Omega = \sin(u) du d\sigma$ и $d\Omega_D = \cos(\gamma) d\beta d\gamma$. В

силу симметрии достаточно задать отображение для одной восьмой части зеркала (при $(\sigma, u) \in [0, \pi/4] \times [0, u_0]$), которая должна формировать одну восьмую часть квадрата $D_1 = \{(\beta, \gamma) | \beta \in [0, \beta_d], \gamma \in [0, \beta]\}$. Определим отображение как в [12–16], из условия, что область $[0, \sigma] \times [0, u_0]$ переходит в треугольный сектор в области (β, γ) , ограниченный прямыми $\gamma = 0$ и $\gamma = \alpha\beta$ (рис. 1). В этом случае закон сохранения светового потока примет вид:

$$\int_0^{\sigma} \int_0^{u_0} \sin(u) du d\sigma = \sigma(1 - \cos(u_0)) = \int_0^{\beta_d} \int_0^{\alpha\beta} I \cos(\gamma) d\gamma d\beta = I \frac{1 - \cos(\alpha\beta_d)}{\alpha} \quad (13)$$

Линия $\sigma = \pi/4, u \in [0, u_0]$ должна переходить в линию $\gamma = \beta, \beta \in [0, \beta_d]$. С учетом этого из (13) несложно получить:

$$\sigma(\alpha) = \sigma(\gamma/\beta) = \frac{\pi \sin^2(\alpha\beta_d/2)}{4\alpha \sin^2(\gamma_d/2)}, \quad (14)$$

где $\alpha = \gamma/\beta \in [0, 1]$. Далее запишем закон сохранения светового потока внутри «сектора»:

$$\int_0^{\sigma(\alpha)} \int_0^u \sin(u) du d\sigma = \int_0^{\beta} \int_0^{\alpha\beta} I \cos(\gamma) d\gamma d\beta. \quad (15)$$

Подставляя $\sigma(\alpha)$ в (15), получим:

$$u(\gamma, \beta) = 2 \arcsin \left(\sin(u_0/2) \frac{\sin(\gamma/2)}{\sin(\gamma\beta_d/2\beta)} \right). \quad (16)$$

Полученные уравнения (14), (16) задают связь между падающими и отраженными лучами.

Для восстановления поверхности зеркала воспользуемся уравнениями (5), (6), где $\mathbf{e}(\beta, \gamma)$ определяется уравнениями (12), (14), (16). В данном примере в качестве контура интегрирования в (5) естественно выбрать прямую, соединяющую точки (0, 0) и (β, γ) . В этом случае:

$$G(\beta, \gamma) = -\int_0^{\beta} \left(\frac{(\mathbf{e}, \partial \mathbf{p} / \partial \beta)}{1 - (\mathbf{e}, \mathbf{p})} + \alpha \frac{(\mathbf{e}, \partial \mathbf{p} / \partial \gamma)}{1 - (\mathbf{e}, \mathbf{p})} \right) d\beta, \quad (17)$$

где $\alpha = \gamma/\beta$. Согласно (5), (6), (16), восстановление одного сечения зеркала, формирующего отрезок $\gamma = \alpha\beta$ в сегменте квадрата D_1 , сводится к одномерному интегрированию выражения (17) вдоль указанного отрезка и подстановки полученного результата в (6).

На рис. 2а показано зеркало, рассчитанное для формирования постоянного распределения интенсивности в квадратной области с угловым размером $2\beta_d = 40^\circ$. Размер зеркала по переменной u составляет $u_0 = 110^\circ$. Функции (14), (16) не удовлетворяют условию интегрируемости (4) [12, 18]. Поэтому рассчитанное зеркало будет формировать заданное распределение интенсивности с некоторой ошибкой. На рис. 2б показано формируемое зеркалом распределение интенсивности при компактном изо-

тропном источнике с диаметром 0,08 мм. Распределение интенсивности было рассчитано в коммерческой программе для светотехнических расчётов TracePro [19]. Полученное распределение является существенно неравномерным, относительное среднеквадратичное отклонение (СКО) от постоянного распределения интенсивности составляет 29,3%. Это согласуется с данными работ [12, 18], в которых говорится об ограниченной применимости рассмотренного отображения в задаче расчёта зеркал. В частности, вид распределения на рис. 2б хорошо согласуется с видом распределения на рис. 2 в работе [18].

Поскольку построенное отображение (14), (16) не удовлетворяет условию интегрируемости, то функция $G(\beta, \gamma)$ определяется неоднозначно. В этом случае, как отмечено ранее, можно выбрать функцию $G(\beta, \gamma)$ оптимальным образом из решения задачи минимизации функционала (7).

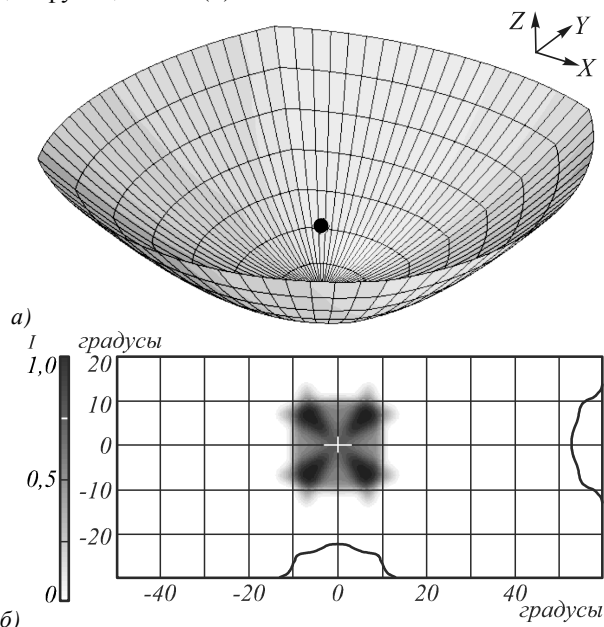


Рис. 2. Зеркало, рассчитанное для формирования постоянного распределения интенсивности в квадратной области с угловым размером 40° . Размеры зеркала по осям координат: $6,77 \times 6,77 \times 2,33$ мм (а); формируемое зеркалом распределение интенсивности при компактном изотропном источнике с диаметром 0,08 мм (б). Источник показан точкой, расстояние от источника до вершины зеркала составляет 1 мм

Определим функцию $G(\beta, \gamma)$ в виде полинома:

$$G(\beta, \gamma) = P(\beta, \gamma) = \sum_{0 \leq i, j \leq M} c_{ij} \beta^i \gamma^j, \quad (18)$$

где $2M$ – степень полинома. При этом задача минимизации функционала (7) сводится к минимизации некоторой функции $\mu(\mathbf{c})$, где \mathbf{c} – вектор из коэффициентов полинома, характеризующей невязку между левыми и правыми частями уравнений (3). Пусть $(\beta_m, \gamma_n), m, n = 1, \dots, N$ – некоторая сетка в области D_1 (одна восьмая часть квадрата). Выберем функцию $\mu(\mathbf{c})$ в виде:

$$\mu(\mathbf{c}) = \sum_{m,n=1}^N \left(\frac{\partial P_{m,n}(\mathbf{c})}{\partial \beta} + \frac{(\mathbf{e}_{m,n}, \partial \mathbf{p}_{m,n} / \partial \beta)}{1 - (\mathbf{e}_{m,n}, \mathbf{p}_{m,n})} \right)^2 - \sum_{m,n=1}^N \left(\frac{\partial P_{m,n}(\mathbf{c})}{\partial \gamma} + \frac{(\mathbf{e}_{m,n}, \partial \mathbf{p}_{m,n} / \partial \gamma)}{1 - (\mathbf{e}_{m,n}, \mathbf{p}_{m,n})} \right)^2, \quad (19)$$

где нижние индексы m, n обозначают значения соответствующих функций в узлах сетки (например, $\mathbf{e}_{m,n} = \mathbf{e}(\sigma(\beta_m, \gamma_n), u(\beta_m, \gamma_n))$). Несложно показать, что задача минимизации (7), (18), (19) ($\mu(\mathbf{c}) \rightarrow \min_{\mathbf{c}}$) может быть решена с использованием линейного метода наименьших квадратов. Для исследования работоспособности описанного оптимизационного подхода функция $G(\beta, \gamma)$ была задана как полином степени $2M=16$ на сетке из 1600 точек. На рис. 3 при $(\beta, \gamma) \in D_1$ показана разность между функцией $G(\beta, \gamma)$, рассчитанной по формуле (17), и функцией $G(\beta, \gamma) = P(\beta, \gamma)$, найденной из решения задачи минимизации (7), (18), (19).

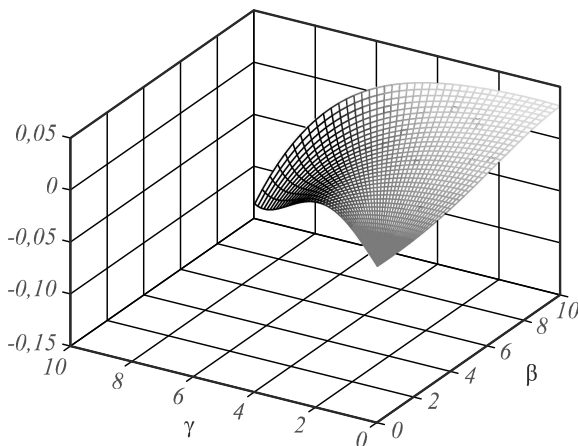


Рис. 3. Нормированная разность $(G(\beta, \gamma) - G_{apr}(\beta, \gamma)) / G_{max}$, где $G_{max} = \max_{(\beta, \gamma) \in D_1} G(\beta, \gamma)$

Согласно рис. 3, функции $G(\beta, \gamma)$ и $G_{apr}(\beta, \gamma)$ наиболее сильно отличаются в окрестности диагонали квадрата D (в окрестности прямой $\gamma = \beta$), где рассчитанное распределение интенсивности (рис. 2) обладает наибольшей неравномерностью. На рис. 4 приведено формируемое зеркалом распределение интенсивности, рассчитанное для оптимизированной функции $G_{apr}(\beta, \gamma)$. Данное распределение, по сравнению с распределением на рис. 2б, является существенно более равномерным, СКО данного распределения от постоянного значения составляет 10,2%. При этом само зеркало визуально неотличимо от зеркала на рис. 2а. В среднем разница между формами поверхностей составляет единицы микрон, максимальное отклонение – 25 микрон.

Таким образом, при восстановлении формы поверхности зеркала целесообразно осуществлять итерационную коррекцию функции $G(\beta, \gamma)$. Это позволяет значительно улучшить качество формируемого распределения при минимальных затратах (задача

минимизации (7), (18), (19) решается с использованием линейного метода наименьших квадратов). Для дальнейшего улучшения качества формируемого распределения освещенности могут быть использованы итерационные методы, основанные на процедуре трассировки лучей.

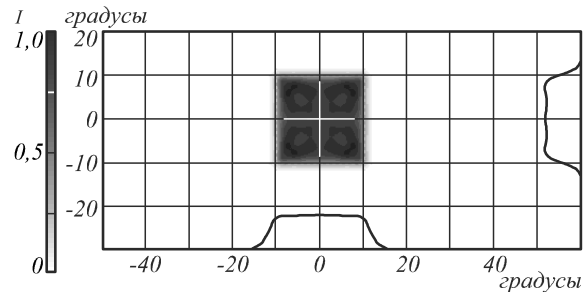


Рис. 4. Распределение интенсивности, формируемое зеркалом при оптимизированной функции $G_{apr}(\beta, \gamma)$

Заключение

Разработан новый метод восстановления формы отражающей (преломляющей) поверхности по заданному отображению. Метод основан на представлении поверхности в виде огибающей двухпараметрического семейства параболоидов (случай отражающей поверхности) или эллипсоидов (случай преломляющей поверхности). Выбранное представление сводит задачу расчета формы оптической поверхности к восстановлению функции по полному дифференциалу. При невыполнении условия интегрируемости предложен итерационный подход к восстановлению поверхности зеркала. При этом расчет поверхности сводится к линейному методу наименьших квадратов. Предложенный метод (аналитический и итерационный варианты) проиллюстрирован на примерах расчета зеркал для формирования постоянного распределения интенсивности в квадратной области в дальней зоне. Результаты расчета показывают, что предложенный итерационный подход позволяет получить распределение хорошего качества при невыполнении условия интегрируемости без использования сложных итерационных процедур.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-07-00339.

Литература

1. **Wu, R.** Freeform illumination design: a nonlinear boundary problem for the elliptic Monge–Ampère equation / R. Wu, L. Xu, P. Liu, Y. Zhang, Z. Zheng, H. Li, X. Liu // Optics Letters. – 2013. – Vol. 38(2). – P. 229–231. – DOI: 10.1364/OL.38.000229.
2. **Wu, R.** Influence of the characteristics of a light source and target on the Monge–Ampère equation method in freeform optics design / R. Wu, P. Benítez, Y. Zhang, J.C. Miñano // Optics Letters. – 2014. – Vol. 39(3). – P. 634–637. – DOI: 10.1364/OL.39.000634.
3. **Elmer, W.** Optical design of reflectors. Part 2 / W. Elmer, F. Cooke // Applied Optics. – 1978. – Vol. 17(7). – P. 977–979. – DOI: 10.1364/AO.17.000977.
4. **Moiseev, M.** Design of TIR optics generating the prescribed irradiance distribution in the circle region / M. Moiseev,

- L. Doskolovich // Journal of the Optical Society of America A. – 2012. – Vol. 29(9). – P. 1758-1763. – DOI: 10.1364/JOSAA.29.001758.
5. **Doskolovich, L.L.** Designing reflectors to generate a line-shaped directivity diagram / L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov, P. Perlo, S. Bernard // Journal of Modern Optics. – 2005. – Vol. 52(11). – P. 1529-1536. – DOI: 10.1080/09500340500058082.
 6. **Doskolovich, L.L.** Designing a mirror to form a line-shaped directivity diagram / L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, S. Bernard // Journal of Modern Optics. – 2007. – Vol. 54(4). – P. 589-597. – DOI: 10.1080/0950034060102186.
 7. **Doskolovich, L.L.** Analytical design of refractive optical elements generating one-parameter intensity distributions / L.L. Doskolovich, A.Yu. Dmitriev, M.A. Moiseev, N.L. Kazanskiy // Journal of the Optical Society of America A. – 2014. – Vol. 31(11). – P. 2538-2544. – DOI: 10.1364/JOSAA.31.002538.
 8. **Doskolovich, L.L.** Analytical design of freeform optical elements generating an arbitrary-shape curve / L.L. Doskolovich, A.Y. Dmitriev, E.A. Bezus, M.A. Moiseev // Applied Optics. – 2013. – Vol. 52(12). – P. 2521-2526. – DOI: 10.1364/AO.52.002521.
 9. **Oliker, V.I.** Mathematical aspects of design of beam shaping surfaces in geometrical optics / V.I. Oliker. – In Book: Trends in Nonlinear Analysis. – ed. by V.I. Oliker, M. Kirkilionis, S. Krömker, R. Rannacher, F. Tomi. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2003. – P. 193-224. – DOI: 10.1007/978-3-662-05281-5_4.
 10. **Michaelis, D.** Cartesian oval representation of freeform optics in illumination systems / D. Michaelis, P. Schreiber, A. Bäuer // Optics Letters. – 2011. – Vol. 36(6). – P. 918-920. – DOI: 10.1364/OL.36.000918.
 11. **Doskolovich, L.L.** Design of mirrors for generating prescribed continuous illuminance distributions on the basis of the supporting quadric method / L.L. Doskolovich, K.V. Borisova, M.A. Moiseev, N.L. Kazanskiy // Applied Optics. – 2016. – Vol. 55(4). – P. 687-695. – DOI: 10.1364/AO.55.000687.
 12. **Fournier, F.** Fast freeform reflector generation using source-target maps / F. Fournier, W. Cassarly, J. Rolland // Optics Express. – 2010. – Vol. 18(5). – P.5295-5304. – DOI: 10.1364/OE.18.005295.
 13. **Mao, X.** Polar-grids based source-target mapping construction method for designing freeform illumination system for a lighting target with arbitrary shape / X. Mao, H. Li, Y. Han, Y. Luo // Optics Express. – 2015. – Vol. 23(4). – P. 4313-4328. – DOI: 10.1364/OE.23.004313.
 14. **Hongtao, L.** A fast feedback method to design easy-molding freeform optical system with uniform illuminance and high light control efficiency / L. Hongtao, C. Shichao, H. Yanjun, L. Yi // Optics Express. – 2013. – Vol. 21(1). – P. 1258-1269. – DOI: 10.1364/OE.21.001258.
 15. **Luo, Y.** Design of compact and smooth free-form optical system with uniform illuminance for LED source / Y. Luo, Z. Feng, Y. Han, H. Li // Optics Express. – 2010. – Vol. 18(9). – P. 9055-9063. – DOI: 10.1364/OE.18.009055.
 16. **Ding, Y.** Freeform LED lens for uniform illumination / Y. Ding, X. Liu, Z. Zheng, P. Gu // Optics Express. – 2008. – Vol. 16(17). – P. 12958-12966. – DOI: 10.1364/OE.16.012958.
 17. **Wang, L.** Discontinuous free-form lens design for prescribed irradiance / L. Wang, K. Qian, Y. Luo // Applied Optics. – 2007. – Vol. 46(18). – P. 3716-3723. – DOI: 10.1364/AO.46.003716.
 18. **Fournier, F.R.** Freeform reflector design using integrable maps / F.R. Fournier, W.J. Cassarly, J.P. Rolland // Proceedings of SPIE: International Optical Design Conference. – 2010. – Vol. 7652. – 765221 (10 p). – DOI: 10.1117/12.871014.
 19. Программное обеспечение для оптического проектирования TracePro [Электронный ресурс] – URL: <http://www.lambdare.com> (дата обращения 14.04.2016).

Сведения об авторах

Досколович Леонид Леонидович в 1989 году с отличием окончил Куйбышевский авиационный институт (КуАИ, ныне – Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва, СГАУ) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2001 год), профессор, работает заведующим лабораторией дифракционной оптики ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, профессором кафедры технической кибернетики Самарского университета. Специалист в области дифракционной оптики, лазерных информационных технологий, нанофотоники. E-mail: leonid@smr.ru.

Андреев Евгений Сергеевич, 1992 года рождения. В 2014 году с отличием окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (СГАУ) по направлению «Прикладные математика и физика». Магистрант второго года обучения магистерской программы «Математическое моделирование и информационные технологии в фотонике» Самарского университета. E-mail: gsomix@gmail.com.

Моисеев Михаил Александрович, 1986 года рождения, в 2008 году с отличием окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (СГАУ) по специальности 010600 «Прикладные математика и физика». Кандидат физико-математических наук (2011 год), работает научным сотрудником в лаборатории дифракционной оптики ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Является членом международного научного общества SPIE. М.А. Моисеев – специалист в области решения обратных задач геометрической оптики. В списке научных работ М.А. Моисеева 23 статьи и 7 авторских свидетельств. Страница в интернете: <http://www.ipsi.smr.ru/staff/MoiseevM.htm>.

ГРНТИ: 29.31.29

Поступила в редакцию 29 апреля 2016 г. Окончательный вариант – 23 июня 2016 г.

ON OPTICAL SURFACE RECONSTRUCTION FROM A PRESCRIBED SOURCE-TARGET MAPPING

L.L. Doskolovich^{1,2}, E.S. Andreev^{1,2}, M.A. Moiseev^{1,2}

¹Image Processing Systems Institute of RAS, – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Samara, Russia

²Samara National Research University, Samara, Russia

Abstract

A new optical surface reconstruction technique in the source-target mapping method is proposed. The technique is based on the representation of the surface as an envelope of a parametric family of paraboloids (ellipsoids). Using such a representation, the calculation of the optical surface is reduced to solving a complete differential equation without regard for the coordinate system. By way of illustration, mirrors that generate uniform intensity distributions in a square region are designed. Simulation of the design examples shows high performance of the proposed technique: it allows us to obtain good-quality intensity distributions even with violation of the integrability condition.

Keywords: geometrical optics, source-target map, surface reconstruction, mirror, intensity distribution

Citation: Doskolovich LL, Andreev ES, Moiseev MA. On optical surface reconstruction from a prescribed source-target mapping. *Computer Optics* 2016; 40(3): 338-45. DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-3-338-345.

Acknowledgements: The work was funded by Russian Foundation of Basic Research grant #14-07-00339.

References

- [1] Wu R, Xu L, Liu P, Zhang Y, Zheng Z, Li H, Liu X. Freeform illumination design: a nonlinear boundary problem for the elliptic Monge–Ampère equation. *Optics Letters* 2013; 38(2): 229-231. DOI: 10.1364/OL.38.000229.
- [2] Wu R, Benítez P, Zhang Y, Miñano JC. Influence of the characteristics of a light source and target on the Monge–Ampère equation method in freeform optics design. *Optics Letters* 2014; 39(3): 634-637. DOI: 10.1364/OL.39.000634.
- [3] Elmer WB, Cooke F. Optical design of reflectors. Part 2. *Applied Optics* 1978; 17(7): 977-979. DOI: 10.1364/AO.17.000977.
- [4] Moiseev MA, Doskolovich LL. Design of TIR optics generating the prescribed irradiance distribution in the circle region. *JOSA A* 2012; 29(9): 1758-1763. DOI: 10.1364/JOSAA.29.001758.
- [5] Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Kharitonov SI, Perlo P, Bernard S. Designing reflectors to generate a line-shaped directivity diagram. *Journal of Modern Optics* 2005; 52(11): 1529-1536. DOI: 10.1080/09500340500058082.
- [6] Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Bernard S. Designing a mirror to form a line-shaped directivity diagram. *Journal of Modern Optics* 2007; 54(4): 589-597. DOI: 10.1080/0950034060102186.
- [7] Doskolovich LL, Dmitriev AY, Moiseev MA, Kazanskiy NL. Analytical design of refractive optical elements generating one-parameter intensity distributions. *JOSA A* 2014; 31(11): 2538-2544. DOI: 10.1364/JOSAA.31.002538.
- [8] Doskolovich LL, Dmitriev AY, Bezus EA, Moiseev MA. Analytical design of freeform optical elements generating an arbitrary-shape curve. *Applied Optics* 2013; 52(12): 2521-2526. DOI: 10.1364/AO.52.002521.
- [9] Oliker VI. Mathematical aspects of design of beam shaping surfaces in geometrical optics. In Book: Kirkilionis M, Krömker S, Rannacher R, Tomi F (eds.). *Trends in Nonlinear Analysis*. Berlin, Heidelberg: Springer; 2003. DOI: 10.1007/978-3-662-05281-5_4.
- [10] Michaelis D, Schreiber P, Bräuer A. Cartesian oval representation of freeform optics in illumination systems. *Optics Letters* 2011; 36(6): 918-920. DOI: 10.1364/OL.36.000918.
- [11] Doskolovich LL, Borisova KV, Moiseev MA, Kazanskiy NL. Design of mirrors for generating prescribed continuous illumination distributions on the basis of the supporting quadric method. *Applied Optics* 2016; 55(4): 687-695. DOI: 10.1364/AO.55.000687.
- [12] Fournier FR, Cassarly WJ, Rolland JP. Fast freeform reflector generation using source-target maps. *Optics Express* 2010; 18(5): 5295-5304. DOI: 10.1364/OE.18.005295.
- [13] Mao X, Li H, Han Y, Luo Y. Polar-grids based source-target mapping construction method for designing freeform illumination system for a lighting target with arbitrary shape. *Optics Express* 2015; 23(4): 4313-4328. DOI: 10.1364/OE.23.004313.
- [14] Hongtao L, Shichao C, Yanjun H, Yi L. A fast feedback method to design easy-molding freeform optical system with uniform illuminance and high light control efficiency. *Optics Express* 2013; 21(1): 1258-1269. DOI: 10.1364/OE.21.001258.
- [15] Luo Y, Feng Z, Han Y, Li H. Design of compact and smooth free-form optical system with uniform illuminance for LED source. *Optics Express* 2010; 18(9): 9055-9063. DOI: 10.1364/OE.18.009055.
- [16] Ding Y, Liu X, Zheng ZR, Gu PF. Freeform LED lens for uniform illumination. *Optics Express* 2008; 16(17): 12958-12966. DOI: 10.1364/OE.16.012958.
- [17] Wang L, Qian K, Luo Y. Discontinuous free-form lens design for prescribed irradiance. *Applied Optics* 2007; 46(18): 3716-3723. DOI: 10.1364/AO.46.003716.
- [18] Fournier FR, Cassarly WJ, Rolland JP. Freeform reflector design using integrable maps. *Proc SPIE* 2010; 7652: 765221. DOI: 10.1117/12.871014.
- [19] Optical Design Software TracePro. Source: <http://www.lambdare.com>.

Authors' information

Leonid Leonidovich Daskolovich graduated with honors (1989) from S.P. Korolyov Kuibyshev Aviation Institute (presently, Samara State Aerospace University, SSAU), majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths (2001) degree from Samara State Aerospace University. Head of laboratory of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, professor at Samara University’s Technical Cybernetics sub-department. Current research interests include diffractive optics, laser information technologies, nanophotonics. E-mail: leonid@smr.ru

Evgeniy Sergeevich Andreev (b. 1992) graduated with honors (2014) from S. P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Mathematics and Physics. He is a second-year student on Master’s program, majoring in “Mathematical Modelling and Information Technologies in Photonics” at Samara National Research University. E-mail: gsomix@gmail.com .

Mikhail Alexandrovich Moiseev (b. 1986) graduated with honors (2008) from S. P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Mathematics and Physics. He received his Candidate's Degree in Physics and Mathematics (2011) from Samara State Aerospace University. He is a researcher at the Diffraction Optics laboratory of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a SPIE-member. He is co-author of 23 scientific papers and seven inventions and patents. His current research interests include nonimaging optics. <http://www.ipsi.smr.ru/staff/MoiseevM.htm>.

Received April 29, 2016. The final version – June 23, 2016.
