

ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА, ОПТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

Формулировка обратной задачи расчёта оптической поверхности при освещающем пучке с плоским волновым фронтом

как задачи Монжа – Канторовича

Л.Л. Досколович^{1,2}, А.А. Мингазов¹, Д.А. Быков^{1,2}, Е.А. Безус^{1,2}

¹ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,

²Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

Рассмотрена задача расчёта преломляющей поверхности, формирующей требуемое распределение освещённости в дальней зоне при плоском освещающем пучке. Показано, что данная задача может быть сформулирована как задача о перемещении масс. Получен вид функции стоимости в данной задаче. Продемонстрировано, что при определённом выборе координат функция стоимости становится квадратичной. Полученная задача о перемещении масс также описывает задачу расчёта зеркала, которая может быть рассмотрена как частный случай задачи расчёта преломляющей поверхности.

Ключевые слова: геометрическая оптика, обратная задача расчёта оптической поверхности, неизображающая оптика, задача Монжа–Канторовича о перемещении масс.

Цитирование: Досколович, Л.Л. Формулировка обратной задачи расчета оптической поверхности при освещающем пучке с плоским волновым фронтом как задачи Монжа – Канторовича / Л.Л. Досколович, А.А. Мингазов, Д.А. Быков, Е.А. Безус // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 5. – С. 705-713. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-5-705-713.

Введение

Задача расчёта преломляющей или отражающей оптической поверхности из условия формирования заданного распределения освещённости в некоторой области относится к классу обратных задач неизображающей оптики и является крайне сложной. В приближении геометрической оптики данная задача сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения (НДУ) эллиптического типа [1–7]. Решение этого НДУ является сложной теоретической и вычислительной задачей.

Формулировка обратной задачи неизображающей оптики как задачи решения НДУ эллиптического типа предполагает, что поверхность оптического элемента является гладкой. Это накладывает существенные ограничения на класс распределений освещённости, которые могут быть сформированы оптическим элементом. Например, гладкая оптическая поверхность не позволяет сформировать распределение освещённости, определённое в несвязной области, состоящей из непересекающихся подобластей. Ограничения также возникают и при формировании многосвязных областей и областей со сложными негладкими границами.

Ряд обратных задач неизображающей оптики может быть сформулирован в виде задачи Монжа–Канторовича о перемещении масс со специальной функцией стоимости [8–18]. Такая формулировка задачи, в отличие от задачи решения НДУ, позволяет рассчитывать непрерывные кусочно-гладкие оптиче-

ские поверхности, формирующие заданные распределения освещённости в несвязных областях и в областях со сложными негладкими границами [14, 15, 17].

Вид функции стоимости определяется типом решаемой задачи. В частности, в задачах, описываемых стандартным уравнением Монжа–Ампера, функция стоимости является квадратичной [19]. Задача о перемещении масс (ЗПМ) с квадратичной функцией стоимости позволяет строго описать только весьма специфический класс задач, например, задачу расчёта функции эйконала светового поля из условия фокусировки в заданную область в параксиальном приближении [16]. В непараксиальном случае функция стоимости уже не является квадратичной, а равна расстоянию между точкой исходной области, в которой задана функция эйконала, и точкой плоскости фокусировки [16, 18]. Функции стоимости получены только для ограниченного круга задач [8–18]. В частности, в базовых теоретических работах [8–11] получен вид функции стоимости в задачах расчёта зеркала [8, 9] и преломляющей оптической поверхности [10, 11], формирующей требуемое распределение освещённости в дальней зоне (распределение интенсивности) при сферическом освещающем пучке. Условие дальней зоны предполагает, что размерами оптической поверхности можно пренебречь по сравнению с расстоянием до освещаемой области.

Получение функций стоимости для новых задач представляет большой теоретический и практический интерес. В этой связи отметим, что в работах [8–11]

не рассмотрен важный частный случай освещающего пучка с плоским волновым фронтом. Несмотря на то, что освещающий пучок с плоским волновым фронтом является частным случаем сферического пучка (когда источник излучения перемещается в бесконечно удаленную точку), выражение для функции стоимости в случае плоского освещающего пучка непосредственно не следует из вида известной функции стоимости для сферического пучка. Это связано с методом построения решения в работах [8–11], в которых задача расчёта зеркала и преломляющей поверхности соотносится с отображением двух областей D_1 и D_2 на единичной сфере. Область D_1 соответствует области излучения источника, а область D_2 – освещаемой области. При падающем плоском пучке область D_1 преобразуется в точку, и поэтому дальнейшие рассуждения работ [8–11] оказываются неприменимыми.

В настоящей статье рассмотрено получение функции стоимости для задачи расчёта преломляющей поверхности, формирующей заданное распределение освещённости в дальней зоне при плоском освещающем пучке. Полученная функция стоимости также описывает задачу расчёта зеркала, которая может быть рассмотрена как частный случай задачи расчёта преломляющей поверхности. Представленные теоретические результаты расширяют класс методов, которые могут быть использованы для расчёта преломляющих поверхностей и зеркал при плоском освещающем пучке. В частности, могут быть применены методы, основанные на сведении решения ЗПМ к решению линейной задачи о назначениях [15–17].

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу расчёта преломляющей поверхности R из условия формирования заданного распределения освещённости в дальней зоне при освещающем пучке с плоским волновым фронтом. Преломляющая поверхность разделяет среды с показателями преломления n_1 и n_2 , $n_1 > n_2$. Рассмотрим плоский световой пучок, распространяющийся в направлении $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$. Предположим, что в плоскости $z = 0$ он имеет распределение освещённости $E_0(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in G$, где $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ – декартовы координаты в данной плоскости (рис. 1).

Задача состоит в расчёте преломляющей поверхности $z = R(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in G$, формирующей заданное распределение освещённости $E(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D_{pl}$ в удаленной плоскости $z = f$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – декартовы координаты в данной плоскости. Понятие «удаленная плоскость» предполагает, что $f \gg R(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in G$, так что размерами преломляющей поверхности по сравнению с расстоянием f можно пренебречь. В этом случае направление преломленного на поверхности R луча, который затем пересекает плоскость $z = f$ в точке $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, можно описывать следующим единичным вектором:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = (p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), p_3(\mathbf{x})) = (x_1, x_2, f) / \sqrt{f^2 + x_1^2 + x_2^2}. \tag{1}$$

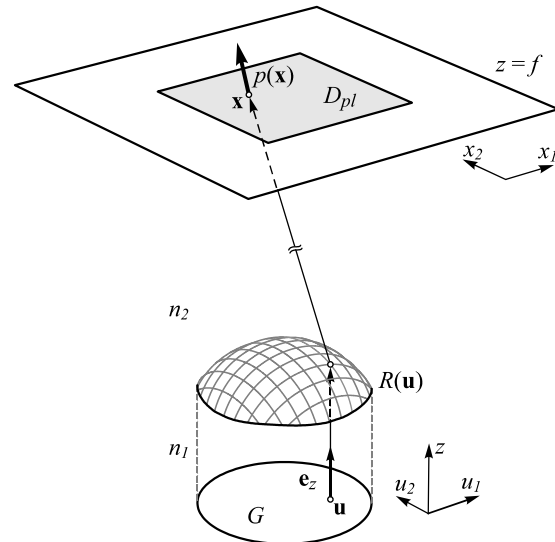


Рис. 1. Геометрия задачи

Вектор $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ задан в области D_{sp} , которая является проекцией области D_{pl} на единичную сферу с центром в начале координат в плоскости $z = 0$.

Задачу формирования заданного распределения освещённости в дальней зоне далее будем рассматривать как задачу формирования распределения интенсивности

$$L(\mathbf{p}_\perp) = E(\mathbf{x}(\mathbf{p}_\perp)) \sqrt{f^2 + \mathbf{x}^2(\mathbf{p}_\perp)}, \mathbf{p}_\perp \in D, \tag{2}$$

где $\mathbf{p}_\perp = (p_1, p_2)$ – поперечные координаты вектора \mathbf{p} в (1),

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}_\perp) = (x_1(\mathbf{p}_\perp), x_2(\mathbf{p}_\perp)) = f \frac{\mathbf{p}_\perp}{\sqrt{1 - \mathbf{p}_\perp^2}}. \tag{3}$$

Выражение для $\mathbf{x}(\mathbf{p}_\perp)$ получено из (1) путём выражения координат $\mathbf{x} \in D_{pl}$ через координаты $\mathbf{p}_\perp \in D$, где область D является проекцией области D_{sp} на единичной сфере на плоскость $z = 0$. При выполнении условия дальней зоны распределение освещённости, формируемое преломляющей поверхностью, может быть рассмотрено как распределение интенсивности от точечного источника излучения, расположенного в начале координат в плоскости $z = 0$. При этом выражение для интенсивности (2) соответствует световому потоку, излученному данным источником в элемент телесного угла.

Обозначим $\mathbf{p}_\perp = \gamma(\mathbf{u})$ лучевое отображение, которое связывает координаты падающих лучей в плоскости $z = 0$ и координаты $\mathbf{p}_\perp = (p_1, p_2)$ лучей, преломленных на поверхности R . Данное отображение удовлетворяет закону сохранения светового потока. В интегральной форме этот закон может быть сформулирован следующим образом: для любого измеримого подмножества $S \subset G$ должно выполняться равенство

$$\int_S E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \int_{\gamma(S)} L(\mathbf{p}_\perp) dS_\Omega = \int_{\gamma(S)} I(\mathbf{p}_\perp) d\mathbf{p}_\perp, \tag{4}$$

где $dS_\Omega = \sqrt{1 - \mathbf{p}_\perp^2} d\mathbf{p}_\perp$ – дифференциал телесного угла,

$I(\mathbf{p}_\perp) = L(\mathbf{p}_\perp) \sqrt{1 - \mathbf{p}_\perp^2}$. Условие сохранения

светового потока (4) можно переписать в дифференциальной форме

$$E_0(\mathbf{u}) = I(\gamma(\mathbf{u}))J(\gamma), \tag{5}$$

где

$$J(\gamma) = \left| \frac{\partial p_1(\mathbf{u})}{\partial u_1} \frac{\partial p_2(\mathbf{u})}{\partial u_2} - \frac{\partial p_1(\mathbf{u})}{\partial u_2} \frac{\partial p_2(\mathbf{u})}{\partial u_1} \right|$$

– якобиан отображения γ . Закон сохранения светового потока также может быть записан в следующей общей форме [8]:

$$\int_G h(\gamma(\mathbf{u})) E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \int_D h(\mathbf{p}_\perp) I(\mathbf{p}_\perp) d\mathbf{p}_\perp, \tag{6}$$

где $h(\mathbf{x})$ – любая непрерывная функция.

Обычно задачу расчёта рефракционной поверхности сводят к решению нелинейного дифференциального уравнения (НДУ) второго порядка эллиптического типа [1–7]. Для получения данного уравнения нужно сначала выразить вектор преломленного луча $\mathbf{p}(\mathbf{u})$ через вектор нормали к поверхности R и вектор падающего луча \mathbf{e}_z . Используя закон Снеллиуса, вектор $\mathbf{p}(\mathbf{u})$ несложно получить в виде

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \frac{1}{v} \left(\mathbf{e}_z - \left[(\mathbf{e}_z, \mathbf{N}(\mathbf{u})) - \sqrt{(\mathbf{e}_z, \mathbf{N}(\mathbf{u}))^2 + v^2 - 1} \right] \mathbf{N}(\mathbf{u}) \right), \tag{7}$$

где $v = n_2/n_1$ – относительный показатель преломления, $\mathbf{N}(\mathbf{u})$ – единичный вектор нормали \mathbf{N} к поверхности R , имеющий вид

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}) = \frac{\left(-\frac{\partial R(\mathbf{u})}{\partial u_1}, -\frac{\partial R(\mathbf{u})}{\partial u_2}, 1 \right)}{\sqrt{1 + \left[\frac{\partial R(\mathbf{u})}{\partial u_1} \right]^2 + \left[\frac{\partial R(\mathbf{u})}{\partial u_2} \right]^2}}.$$

Далее, подставляя (7) в дифференциальную форму закона сохранения светового потока (5), можно получить вышеупомянутое НДУ.

Формулировка задачи расчёта рефракционной поверхности как задачи решения НДУ предполагает гладкость поверхности $R(\mathbf{u})$ и дифференцируемость отображения γ . Эти требования существенно ограничивают класс решаемых задач (класс формируемых распределений интенсивности) [14–17]. Поэтому далее мы получим специальное представление для поверхности $R(\mathbf{u})$, позволяющее снять ограничение на гладкость поверхности и сформулировать понятие так называемого слабого решения задачи (эта формулировка приведена в следующем параграфе статьи). Для этого сначала рассмотрим вспомогательную задачу, состоящую в расчёте плоской преломляющей поверхности $z_{pl}(\mathbf{u})$, преобразующей освещающий пучок с плоским волновым фронтом и направлением \mathbf{e}_z в пучок с плоским волновым фронтом и направлением $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $|\mathbf{p}| = 1$. Из закона Снеллиуса несложно получить, что нормальный вектор плоскости $z_{pl}(\mathbf{u})$ определяется соотношением

$$\mathbf{N} \sim \mathbf{e}_z - v\mathbf{p}. \tag{8}$$

Соответственно, уравнение плоскости можно записать в виде

$$z_{pl}(\mathbf{u}) = g + \frac{vp_1}{1 - vp_3} u_1 + \frac{vp_2}{1 - vp_3} u_2, \tag{9}$$

где g – произвольная константа, определяющая смещение плоскости. Для дальнейших выкладок удобно ввести функцию

$$\mathcal{K}(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\perp) = v \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\perp)}{1 - v\sqrt{1 - \mathbf{p}_\perp^2}}. \tag{10}$$

Преломляющая поверхность R для формирования заданного распределения освещённости в дальней зоне может быть представлена в виде огибающей семейства плоскостей (9) по параметрам $\mathbf{p}_\perp = (p_1, p_2)$ [20], при этом константа g в формуле (9) становится функцией от \mathbf{p}_\perp . Действительно, по определению огибающей поверхность касается каждой плоскости семейства (9) в некоторой точке. При этом вектор нормали огибающей поверхности совпадает в точке касания с вектором нормали соответствующей плоскости семейства. Поэтому направления преломленных лучей будут принадлежать требуемой области D . Уравнение огибающей определяется системой уравнений, включающей уравнение плоскости (9) и следующие два уравнения [20]:

$$\frac{\partial}{\partial p_i} [g(\mathbf{p}_\perp) + \mathcal{K}(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\perp)] = 0, \quad i = 1, 2. \tag{11}$$

Отметим, что уравнения (11) определяют критическую точку функции $g(\mathbf{p}_\perp) + \mathcal{K}(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\perp)$ по переменным (p_1, p_2) при фиксированном значении $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Далее мы будем рассматривать огибающие поверхности, для которых эта критическая точка является точкой максимума. Это позволяет записать огибающую поверхность в виде

$$R(\mathbf{u}) = \max_{\mathbf{p}_\perp \in D} [g(\mathbf{p}_\perp) + \mathcal{K}(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\perp)]. \tag{12}$$

Геометрически это означает, что поверхность R является «огибающей сверху» для семейства плоскостей (9), т.е. все плоскости семейства расположены под поверхностью R . При этом поверхность R является выпуклой. Случай, когда критическая точка является точкой минимума, соответствует вогнутой поверхности и рассматривается аналогично.

Уравнение (12) задаёт лучевое отображение в виде

$$\gamma : \mathbf{u} \mapsto \arg \max_{\mathbf{p}_\perp \in D} [g(\mathbf{p}_\perp) + \mathcal{K}(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\perp)]. \tag{13}$$

При этом задача расчёта преломляющей поверхности сводится к нахождению такой функции $g(\mathbf{p}_\perp)$, что отображение $\gamma(\mathbf{u})$, определяемое формулой (13), удовлетворяет закону сохранения светового потока, определённого уравнением (4). Отметим, что не каждое отображение γ , удовлетворяющее закону сохранения светового потока (4), является интегрируемым,

то есть может быть реализовано преломляющей поверхностью. Отображение γ является интегрируемым, только если существует функция $g(\mathbf{p}_\perp)$, удовлетворяющая уравнениям (11) при $\mathbf{p}_\perp = \gamma(\mathbf{u})$. В этом случае преломляющая поверхность определяется через функцию $g(\mathbf{p}_\perp)$ уравнением (12).

2. Слабое решение

В работах [8, 9], посвящённых расчёту зеркала для формирования заданного распределения интенсивности (или распределения освещённости в дальней зоне) при сферическом падающем пучке, вводится понятие так называемого слабого (обобщённого) решения. Понятие слабого решения не предполагает гладкости поверхности зеркала и дифференцируемости реализуемого им лучевого отображения. В данном параграфе мы введём аналогичное понятие для рассматриваемой задачи расчёта рефракционной поверхности при плоском освещающем пучке.

Несложно получить, что для биективного отображения $\mathbf{p}_\perp = \gamma(\mathbf{u})$ функция $g(\mathbf{p}_\perp)$ в (12) определяется следующим соотношением:

$$g(\mathbf{p}_\perp) = \min_{\mathbf{u} \in G} [R(\mathbf{u}) - \mathcal{K}(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\perp)]. \tag{14}$$

Действительно, из (12) следует, что для любых $\mathbf{u} \in G$ и $\mathbf{p}_\perp \in D$ выполняется неравенство $g(\mathbf{p}_\perp) \leq R(\mathbf{u}) - \mathcal{K}(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\perp)$. В частности, данное неравенство выполняется для \mathbf{u} , обеспечивающего минимум правой части:

$$g(\mathbf{p}_\perp) \leq \min_{\mathbf{u} \in G} [R(\mathbf{u}) - \mathcal{K}(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\perp)]. \tag{15}$$

В силу биективности отображения $\mathbf{p}_\perp = \gamma(\mathbf{u})$ для любого $\mathbf{p}_\perp \in D$ существует $\mathbf{u}_0 \in G$ такое, что

$$g(\mathbf{p}_\perp) = R(\mathbf{u}_0) - \mathcal{K}(\mathbf{u}_0, \mathbf{p}_\perp). \tag{16}$$

Далее из соотношений (15) и (16) следует представление (14). Отметим, что формула (14) определяет обратное отображение

$$\gamma^{-1} : \mathbf{p}_\perp \mapsto \arg \min_{\mathbf{u} \in G} [R(\mathbf{u}) - \mathcal{K}(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\perp)]. \tag{17}$$

Поскольку функции $R(\mathbf{u})$ и $g(\mathbf{p}_\perp)$ связаны неравенством $R(\mathbf{u}) - g(\mathbf{p}_\perp) \geq \mathcal{K}(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\perp)$, которое превращается в равенство только в случае, когда $\mathbf{p}_\perp = \gamma(\mathbf{u})$, то отображение γ можно определить следующим образом:

$$\gamma(\mathbf{u}) = \{ \mathbf{p}_\perp \mid R(\mathbf{u}) - g(\mathbf{p}_\perp) = \mathcal{K}(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\perp) \}. \tag{18}$$

Определение 1. «Хорошей парой» будем называть пару функций $\{ \alpha(\mathbf{u}), \beta(\mathbf{p}_\perp) \}$ таких, что $\alpha(\mathbf{u})$ непрерывна на G , $\beta(\mathbf{p}_\perp)$ непрерывна на D , и функции $\alpha(\mathbf{u})$ и $\beta(\mathbf{p}_\perp)$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{u}) &= \max_{\mathbf{p}_\perp \in D} [\beta(\mathbf{p}_\perp) + \mathcal{K}(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\perp)], \\ \beta(\mathbf{p}_\perp) &= \min_{\mathbf{u} \in G} [\alpha(\mathbf{u}) - \mathcal{K}(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\perp)]. \end{aligned} \tag{19}$$

Отметим, что на функции $\alpha(\mathbf{u})$ и $\beta(\mathbf{p}_\perp)$ не накладывается требование дифференцируемости. При этом $\alpha(\mathbf{u}) - \beta(\mathbf{p}_\perp) \geq \mathcal{K}(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\perp)$ для любых $\mathbf{u} \in G$ и $\mathbf{p}_\perp \in D$. Следуя

работам [8–11], несложно показать, что функции $\alpha(\mathbf{u})$ и $\beta(\mathbf{p}_\perp)$ являются липшицевыми в областях G и D соответственно. Согласно теореме Радемахера, липшицева в некоторой области функция является дифференцируемой почти всюду в данной области (т. е. мера множества точек, в которых функция не дифференцируема, равна нулю). Значит, функции $\alpha(\mathbf{u})$ и $\beta(\mathbf{p}_\perp)$, образующие хорошую пару, почти всюду дифференцируемы и соответствующее отображение вида (18) определено почти всюду.

Теперь сформулируем, что следует понимать под слабым (обобщённым) решением.

Определение 2. Слабым решением называется хорошая пара функций $\{ R(\mathbf{u}), g(\mathbf{p}_\perp) \}$ такая, что отображение, определённое формулой

$$\gamma(\mathbf{u}) = \{ \mathbf{p}_\perp \in D \mid R(\mathbf{u}) - g(\mathbf{p}_\perp) = \mathcal{K}(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\perp) \}, \tag{20}$$

удовлетворяет условию сохранения светового потока (4). Подчеркнём, что в слабом решении функция $R(\mathbf{u})$ предполагается дифференцируемой не всюду, а почти всюду. При этом отображение (20) может иметь разрывы на множестве меры нуль (данные разрывы не влияют на величину интегралов в (4)).

3. Задача о перемещении масс

Понятие слабого решения позволяет сформулировать задачу расчёта рефракционной поверхности как задачу Монжа–Канторовича о перемещении масс (ЗПМ) [8, 9] с функцией стоимости $\mathcal{K}(\mathbf{u}, T(\mathbf{u}))$, определённой в (10). В рассматриваемой ЗПМ под распределениями масс в исходном пункте и пункте назначения понимаются распределение освещённости $E_0(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in G$ падающего пучка и функция

$$I(\mathbf{p}_\perp) = L(\mathbf{p}_\perp) \sqrt{1 - \mathbf{p}_\perp^2},$$

$\mathbf{p}_\perp \in D$, определяемая требуемым распределением интенсивности $L(\mathbf{p}_\perp)$.

Формулировка рассматриваемой задачи как ЗПМ следует из следующей теоремы.

Теорема. Пусть $\{ R(\mathbf{u}), g(\mathbf{p}_\perp) \}$ – слабое решение. Тогда лучевое отображение $\mathbf{p}_\perp = \gamma(\mathbf{u})$, задаваемое рефракционной поверхностью $R(\mathbf{u})$, минимизирует функционал

$$\mathcal{F}(T) = \int_G \mathcal{K}(\mathbf{u}, T(\mathbf{u})) E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \tag{21}$$

определённый на пространстве отображений $T: G \rightarrow D$ (возможно, определённых почти всюду), удовлетворяющих условию сохранения светового потока:

$$\forall S \subset D \int_{T^{-1}(S)} E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \int_S I(\mathbf{p}_\perp) d\mathbf{p}_\perp. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{p}_\perp = T(\mathbf{u})$ – произвольное отображение (план перевозки). Согласно (12), имеет место неравенство

$$R(\mathbf{u}) - g(T(\mathbf{u})) \geq \mathcal{K}(\mathbf{u}, T(\mathbf{u})),$$

причём равенство достигается только если $T = \gamma$. Умножим это неравенство на $E_0(\mathbf{u})$ и проинтегрируем по области G :

$$\mathcal{F}(T) = \int_G \mathcal{K}(\mathbf{u}, T(\mathbf{u})) E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \leq \int_G R(\mathbf{u}) E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u} - \int_G g(T(\mathbf{u})) E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u}. \quad (23)$$

Используя формулу (6), получим

$$\int_G g(T(\mathbf{u})) E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \int_D g(\mathbf{p}_\perp) I(\mathbf{p}_\perp) d\mathbf{p}_\perp = \int_G g(\gamma(\mathbf{u})) E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u}. \quad (24)$$

Подставляя (24) в (23), получим

$$\mathcal{F}(T) \leq \int_G R(\mathbf{u}) E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u} - \int_G g(\gamma(\mathbf{u})) E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \int_G \mathcal{K}(\mathbf{u}, \gamma(\mathbf{u})) E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \mathcal{F}(\gamma). \quad (25)$$

Полученное неравенство $\mathcal{F}(T) \leq \mathcal{F}(\gamma)$ доказывает теорему. При этом если отображение T отличается от γ на множестве ненулевой меры, то неравенство строгое.

Следствие. Пусть $\{R(\mathbf{u}), g(\mathbf{p}_\perp)\}$ – слабое решение. Тогда обратное отображение $\mathbf{u} = \gamma^{-1}(\mathbf{p}_\perp)$ минимизирует функционал

$$\mathcal{F}'(Q) = \int_D \mathcal{K}(Q(\mathbf{p}_\perp), \mathbf{p}_\perp) I(\mathbf{p}_\perp) d\mathbf{p}_\perp, \quad (26)$$

определённый на пространстве отображений $Q: D \rightarrow G$ (возможно, определённых почти всюду), удовлетворяющих условию сохранения светового потока.

Действительно, делая замену $\mathbf{p}_\perp = Q^{-1}(\mathbf{u})$ в функционале $\mathcal{F}'(Q)$, получим:

$$\mathcal{F}'(Q) = \mathcal{F}(Q^{-1}),$$

что и доказывает данное следствие.

Таким образом, лучевое отображение $\mathbf{p}_\perp = \gamma(\mathbf{u})$ может быть найдено из решения ЗПМ (21), а обратное отображение $\mathbf{u} = \gamma^{-1}(\mathbf{p}_\perp)$ – из решения ЗПМ (26). В задаче расчёта преломляющей поверхности $R(\mathbf{u})$, формирующей сложное распределение интенсивности, оказывается, более удобно работать именно с обратным отображением $\mathbf{u} = \gamma^{-1}(\mathbf{p}_\perp)$ [15, 17]. В этом случае функция $g(\mathbf{p}_\perp)$ может быть восстановлена из уравнений (11) по обратному отображению. Далее функция $R(\mathbf{u})$ рассчитывается по формуле (12).

Интересно отметить, что ЗПМ (21) с функцией стоимости (10) эквивалентна ЗПМ со следующей квадратичной функцией стоимости:

$$\tilde{\mathcal{K}}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{p}}) = -(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{p}})^2. \quad (27)$$

Действительно, рассмотрим следующий функционал:

$$\tilde{\mathcal{F}}(T) = - \int_G (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{p}[T(\mathbf{u})]))^2 E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \quad (28)$$

определённый на пространстве отображений $T: G \rightarrow D$, удовлетворяющих условию сохранения светового потока, где

$$\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{p}_\perp) = (\tilde{p}_1(\mathbf{p}_\perp), \tilde{p}_2(\mathbf{p}_\perp)) = v \frac{\mathbf{p}_\perp}{1 - v\sqrt{1 - \mathbf{p}_\perp^2}}. \quad (29)$$

Раскрывая в (28) квадрат и используя соотношение (6), преобразуем $\tilde{\mathcal{F}}(T)$ к виду

$$\tilde{\mathcal{F}}(T) = \mathcal{F}(T) - \left[\int_G \mathbf{u}^2 E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u} + \int_G \tilde{\mathbf{p}}_\perp^2(\mathbf{p}_\perp) I(\mathbf{p}_\perp) d\mathbf{p}_\perp \right]. \quad (30)$$

Поскольку слагаемые в квадратных скобках не зависят от отображения $T: G \rightarrow D$, то минимизация функционала (21) эквивалентна минимизации функционала (28). В свою очередь, задача минимизации функционала (28) соответствует ЗПМ из области G в область \tilde{D} , являющейся образом области D при отображении (29), с квадратичной функцией стоимости (27). При этом «распределение масс» в области \tilde{D} описывается функцией

$$\tilde{I}(\tilde{\mathbf{p}}) = I(\mathbf{p}_\perp(\tilde{\mathbf{p}})) J(\tilde{\mathbf{p}}), \quad (31)$$

где $J(\tilde{\mathbf{p}})$ – якобиан преобразования координат, а $\mathbf{p}_\perp(\tilde{\mathbf{p}})$ несложно получить из (29) в виде

$$\mathbf{p}_\perp(\tilde{\mathbf{p}}) = \frac{\tilde{\mathbf{p}} \left[1 - \sqrt{v^2 + (v^2 - 1)\tilde{\mathbf{p}}^2} \right]}{v(1 + \tilde{\mathbf{p}}^2)}. \quad (32)$$

В заключение отметим, что если в представлении поверхности (12) выбрать не максимум (случай выпуклой поверхности $R(\mathbf{u})$), а минимум (случай вогнутой поверхности $R(\mathbf{u})$), то соответствующая ЗПМ будет состоять в максимизации функционала (21). Таким образом, задачи минимизации и максимизации функционала (21) соответствуют случаям выпуклой и вогнутой поверхностей $R(\mathbf{u})$ соответственно. Случаи выпуклой и вогнутой поверхностей отличаются конфигурацией преломленных лучей [14]. Для выпуклой поверхности $R(\mathbf{u})$ преломленные лучи не пересекают оптическую ось (ось \mathbf{e}_z), а для вогнутой – пересекают.

4. Задача расчёта зеркальной поверхности

В задаче расчёта зеркальной поверхности будем считать, что направление падающего пучка определяется вектором $-\mathbf{e}_z = (0, 0, -1)$. В остальном геометрия задачи остаётся неизменной. Уравнение плоской отражающей поверхности $z_{pl}(\mathbf{u})$, преобразующей освещающий пучок с плоским волновым фронтом и направлением $-\mathbf{e}_z$ в пучок с плоским волновым фронтом и направлением \mathbf{p} , несложно получить в виде

$$z_{pl}(\mathbf{u}) = g + \mathcal{K}_m(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\perp), \quad (33)$$

где g – произвольная константа, а функция $\mathcal{K}_m(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\perp)$ имеет вид

$$\mathcal{K}_m(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\perp) = - \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\perp)}{1 + \sqrt{1 - \mathbf{p}_\perp^2}}. \quad (34)$$

Функция $\mathcal{K}_m(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\perp)$ является частным случаем функции $\mathcal{K}(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\perp)$ в (10) при относительном показателе преломления $v = -1$. Поэтому, повторяя выкладки, приведённые в параграфах 2 и 3, несложно получить, что задача расчёта зеркала также может быть сфор-

мулирована как ЗПМ с функцией стоимости (34) или с квадратичной функцией стоимости (27).

Заключение

Задача расчёта преломляющей поверхности, формирующей заданное распределение освещённости в дальней зоне при плоском освещающем пучке, сформулирована как задача Монжа–Канторовича о перемещении масс. Получен вид функции стоимости в данной ЗПМ. Показано, что при определённом выборе координат функция стоимости становится квадратичной. Полученная ЗПМ также описывает задачу расчёта зеркала, которая может быть рассмотрена как частный случай задачи расчёта преломляющей поверхности.

Полученные в работе теоретические результаты расширяют класс методов, которые могут быть использованы для расчёта преломляющих поверхностей и зеркал при плоском освещающем пучке. В частности, предложенный авторами настоящей статьи подход к расчёту оптических поверхностей, основанный на сведении решения ЗПМ к решению линейной задачи о назначениях [15–17], теперь может быть применён к решению рассмотренной в статье задачи.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 18-07-00982, 18-29-03067, 18-07-00514 (формулировка задачи расчёта преломляющей или зеркальной поверхностей как задачи о перемещении масс) и Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (соглашение № 007-ГЗ/Ч3363/26) в части формулировки слабого решения задачи.

Литература

1. **Wu, R.** Design of freeform illumination optics / R. Wu, Z. Feng, Z. Zheng, R. Liang, P. Benítez, J.C. Miñano // *Laser & Photonics Reviews*. – 2018. – Vol. 12, Issue 7. – P. 1700310. – DOI: 10.1002/lpor.201700310.
2. **Wu, R.** A mathematical model of the single freeform surface design for collimated beam shaping / R. Wu, P. Liu, Y. Zhang, Z. Zheng, H. Li, X. Liu // *Optics Express*. – 2013. – Vol. 21, Issue 18. – P. 20974-20989. – DOI: 10.1364/OE.21.020974.
3. **Wu, R.** Freeform illumination design: a nonlinear boundary problem for the elliptic Monge–Ampère equation / R. Wu, L. Xu, P. Liu, Y. Zhang, Z. Zheng, H. Li, X. Xiu // *Optics Letters*. – 2013. – Vol. 38, Issue 2. – P. 229–231. – DOI: 10.1364/OL.38.000229.
4. **Wu, R.** Initial design with L2 Monge–Kantorovich theory for the Monge–Ampère equation method in freeform surface illumination design / R. Wu, Y. Zhang, M.M. Sulman, Z. Zheng, P. Benítez, J.C. Miñano // *Optics Express*. – 2014. – Vol. 22, Issue 13. – P. 16161-16177. – DOI: 10.1364/OE.22.016161.
5. **Ma, Y.** Hybrid method of free-form lens design for arbitrary illumination target / Y. Ma, H. Zhang, Z. Su, Y. He, L. Xu, X. Lui, H. Li // *Applied Optics*. – 2015. – Vol. 54, Issue 14. – P. 4503–4508. – DOI: 10.1364/AO.54.004503.
6. **Mao, X.** Design of a smooth freeform illumination system for a point light source based on polar-type optimal transport mapping / X. Mao, S. Xu, X. Hu, Y. Xie // *Applied Optics*. – 2017. – Vol. 56, Issue 22. – P. 6324-6331. – DOI: 10.1364/AO.56.006324.
7. **Wu, R.** Formulating the design of two freeform lens surfaces for point-like light sources / R. Wu, S. Chang, Z. Zheng, L. Zhao, X. Liu // *Optics Letters*. – 2018. – Vol. 43, Issue 7. – P. 1619-1622. – DOI: 10.1364/OL.43.001619.
8. **Glimm, T.** Optical design of single reflector systems and the Monge–Kantorovich mass transfer problem / T. Glimm, V. Oliker // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2003. – Vol. 117, Issue 3. – P. 4096-4108. – DOI: 10.1023/A:1024856201493.
9. **Wang, X.-J.** On the design of a reflector antenna II / X.-J. Wang // *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*. – 2004. – Vol. 20, Issue 3. – P. 329-341. – DOI: 10.1007/s00526-003-0239-4.
10. **Gutiérrez, C.E.** Refraction problems in geometric optics / C.E. Gutiérrez. – In: *Fully nonlinear PDEs in real and complex geometry and optics* / ed. by C.E. Gutiérrez, E. Lanconelli. – Springer, 2014. – P. 95-150. – DOI: 10.1007/978-3-319-00942-1_3.
11. **Gutiérrez, C.E.** The refractor problem in reshaping light beams / C.E. Gutiérrez, Q. Huang // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 2009. – Vol. 193, Issue 2. – P. 423-443. – DOI: 10.1007/s00205-008-0165-x.
12. **Rubinstein, J.** Intensity control with a free-form lens / J. Rubinstein, G. Wolansky // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2007. – Vol. 24, Issue 2. – P. 463-469. – DOI: 10.1364/JOSAA.24.000463.
13. **Oliker, V.** Designing freeform lenses for intensity and phase control of coherent light with help from geometry and mass transport / V. Oliker // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 2011. – Vol. 201, Issue 3. – P. 1013-1045. – DOI: 10.1007/s00205-011-0419-x.
14. **Oliker, V.** Beam shaping with a plano-freeform lens pair / V. Oliker, L.L. Doskolovich, D.A. Bykov // *Optics Express*. – 2018. – Vol. 26, Issue 15. – P. 19406-19419. – DOI: 10.1364/OE.26.019406.
15. **Doskolovich, L.L.** Designing double freeform surfaces for collimated beam shaping with optimal mass transportation and linear assignment problems / L.L. Doskolovich, D.A. Bykov, E.S. Andreev, E.A. Bezus, V. Oliker // *Optics Express*. – 2018. – Vol. 26, Issue 19. – P. 24602-24613. – DOI: 10.1364/OE.26.024602.
16. **Doskolovich, L.L.** Variational approach to calculation of light field eikonal function for illuminating a prescribed region / L.L. Doskolovich, A.A. Mingazov, D.A. Bykov, E.S. Andreev, E.A. Bezus // *Optics Express*. – 2017. – Vol. 25, Issue 22. – P. 26378-26392. – DOI: 10.1364/OE.25.026378.
17. **Bykov, D.A.** Linear assignment problem in the design of freeform refractive optical elements generating prescribed irradiance distributions / D.A. Bykov, L.L. Doskolovich, A.A. Mingazov, E.A. Bezus, N.L. Kazanskiy // *Optics Express*. – 2018. – Vol. 26, Issue 21. – P. 27812-27825. – DOI: 10.1364/OE.26.027812.
18. **Мингазов, А.А.** Вариационная интерпретация задачи расчёта функции эйконала из условия формирования заданного распределения освещённости / А.А. Мингазов, Д.А. Быков, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский // *Компьютерная оптика*. – 2018. – Т. 42, № 4. – С. 568-573. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-568-573.
19. **Sulman, M.M.** An efficient approach for the numerical solution of the Monge–Ampère equation / M.M. Sulman, J.F. Williams, R.D. Russell // *Applied Numerical Mathematics*. – 2011. – Vol. 61, Issue 3. – P. 298-307. – DOI: 10.1016/j.apnum.2010.10.006.

20. **Doskolovich, L.L.** Analytical design of refractive optical elements generating one-parameter intensity distributions / L.L. Doskolovich, A.Yu. Dmitriev, M.A. Moiseev, N.L. Kazanskiy // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2014. – Vol. 31, Issue 11. – P. 2538-2544. – DOI: 10.1364/JOSAA.31.002538.
21. **Eisenhart, L.P.** A treatise on the differential geometry of curves and surfaces / L.P. Eisenhart. – Schwarz Press, 2008. – 492 pp.

Сведения об авторах

Досколович Леонид Леонидович, в 1989 году с отличием окончил Куйбышевский авиационный институт (КуАИ, ныне – Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2001 год), профессор, работает заведующим лабораторией дифракционной оптики ИСОИ РАН – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, профессором кафедры технической кибернетики Самарского университета. Специалист в области дифракционной оптики, лазерных информационных технологий, нанофотоники. E-mail: leonid@smr.ru.

Мингазов Альберт Айдарович, в 2010 году окончил Самарский государственный университет по специальности «Математика». В 2012 году окончил магистратуру НИУ ВШЭ по направлению «Математика», в 2015 окончил аспирантуру Санкт-Петербургского отделения математического института имени В.А. Стеклова. Кандидат физико-математических наук (2015), научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики Института систем обработки изображений РАН – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. E-mail: mingazov88@gmail.com.

Быков Дмитрий Александрович в 2009 году с отличием окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (СГАУ, ныне – Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва) по специальности «Прикладная математика и информатика». Доктор физико-математических наук (2017 г.), и. о. старшего научного сотрудника лаборатории дифракционной оптики Института систем обработки изображений РАН – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, доцент кафедры технической кибернетики Самарского университета. Области научных интересов: нанофотоника, магнитооптика, плазмоника, электромагнитная теория дифракции. E-mail: bykovd@gmail.com.

Безус Евгений Анатольевич в 2009 году с отличием окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (СГАУ) по специальности «Прикладная математика и информатика». Кандидат физико-математических наук (2012 г.), научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики Института систем обработки изображений РАН – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, доцент кафедры технической кибернетики Самарского университета. Области научных интересов: нанофотоника, плазмоника, электромагнитная теория дифракции. E-mail: evgeni.bezus@gmail.com.

ГРНТИ: 29.31.29

Поступила в редакцию 29 марта 2019 г. Окончательный вариант – 30 апреля 2019 г.

Formulation of the inverse problem of calculating the optical surface for an illuminating beam with a plane wavefront as the Monge–Kantorovich problem

L.L. Doskolovich^{1,2}, A.A. Mingazov¹, D.A. Bykov^{1,2}, E.A. Bezus^{1,2}

¹IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,
Molodogvardeyskaya 151, 443001, Samara, Russia,

²Samara National Research University, Moskovskoye Shosse 34, 443086, Samara, Russia

Abstract

A problem of calculating a refractive surface that forms a required irradiance distribution in the far field in the case of a plane illuminating beam is considered. We show that this problem can be formulated as a mass transportation problem. The specific form of the cost function for this problem is obtained. It is shown that with a certain choice of coordinates, the cost function becomes quadratic. The resulting mass transportation problem also describes a problem of calculating a mirror, which can be considered as a special case of the problem of calculating a refractive surface.

Keywords: geometrical optics, optical design, nonimaging optics, illumination design, Monge–Kantorovich problem, mass transportation problem.

Citation: Doskolovich LL, Mingazov AA, Bykov DA, Bezus EA. Formulation of the inverse problem of calculating the optical surface for an illuminating beam with a plane wavefront as the Monge–Kantorovich problem. *Computer Optics* 2019; 43(5): 705-713. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-5-705-713.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR) under grants ## 18-07-00982, 18-29-03067, 18-07-00514 (formulation of the problem of calculating refractive or reflective optical surface as an optimal mass transportation problem) and the RF Ministry of Science and Higher Education within the State assignment to FSRC “Crystallography and Photonics” RAS under agreement 007-Г3/Ч3363/26 (formulation of the weak solution of the problem).

References

- [1] Wu R, Feng Z, Zheng Z, Liang R, Benítez P, Miñano JC. Design of freeform illumination optics. *Laser Photon Rev* 2018; 12(7): 1700310. DOI: 10.1002/lpor.201700310.
- [2] Wu R, Liu P, Zhang Y, Zheng Z, Li H, Liu X. A mathematical model of the single freeform surface design for collimated beam shaping. *Opt Express* 2013; 21(18): 20974-20989. DOI: 10.1364/OE.21.020974.
- [3] Wu R, Xu L, Liu P, Zhang Y, Zheng Z, Li H, Xiu X. Freeform illumination design: a nonlinear boundary problem for the elliptic Monge–Ampère equation. *Opt Lett* 2013; 38(2): 229-231. DOI: 10.1364/OL.38.000229.
- [4] Wu R, Zhang Y, Sulman MM, Zheng Z, Benítez P, Miñano JC. Initial design with L2 Monge–Kantorovich theory for the Monge–Ampère equation method in freeform surface illumination design. *Opt Express* 2014; 22(13): 16161-16177. DOI: 10.1364/OE.22.016161.
- [5] Ma Y, Zhang H, Su Z, He Y, Xu L, Lui X, Li H. Hybrid method of free-form lens design for arbitrary illumination target. *Appl Opt* 2015; 54(14): 4503-4508. DOI: 10.1364/AO.54.004503.
- [6] Mao X, Xu S, Hu X, Xie Y. Design of a smooth freeform illumination system for a point light source based on polar-type optimal transport mapping. *Appl Opt* 2017; 56(22): 6324-6331. DOI: 10.1364/AO.56.006324.
- [7] Wu R, Chang S, Zheng Z, Zhao L, Liu X. Formulating the design of two freeform lens surfaces for point-like light sources. *Opt Lett* 2018; 43(7): 1619-1622. DOI: 10.1364/OL.43.001619.
- [8] Glimm T, Oliker V. Optical design of single reflector systems and the Monge–Kantorovich mass transfer problem. *J Math Sci* 2003; 117(3): 4096–108. DOI: 10.1023/A:1024856201493.
- [9] Wang XJ. On the design of a reflector antenna II. *Calc Var Partial Dif* 2004; 20(3): 329-341. DOI: 10.1007/s00526-003-0239-4.
- [10] Gutiérrez CE. Refraction problems in geometric optics. In Book: Gutiérrez CE, Lanconelli E, eds. *Fully nonlinear PDEs in real and complex geometry and optics*. Springer; 2014: 95-150. DOI: 10.1007/978-3-319-00942-1_3.
- [11] Gutiérrez CE, Huang Q. The refractor problem in reshaping light beams. *Arch Ration Mech Anal* 2009; 193(2): 423-443. DOI: 10.1007/s00205-008-0165-x.
- [12] Rubinstein J, Wolansky G. Intensity control with a freeform lens. *J Opt Soc Am A* 2007; 24(2): 463-469. DOI: 10.1364/JOSAA.24.000463.
- [13] Oliker V. Designing freeform lenses for intensity and phase control of coherent light with help from geometry and mass transport. *Arch Ration Mech Anal* 2011; 201(3): 1013-1045. DOI: 10.1007/s00205-011-0419-x.
- [14] Oliker V, Doskolovich LL, Bykov DA. Beam shaping with a plano-freeform lens pair. *Opt Express* 2018; 26(15): 19406-19419. DOI: 10.1364/OE.26.019406.
- [15] Doskolovich LL, Bykov DA, Andreev ES, Bezus EA, Oliker V. Designing double freeform surfaces for collimated beam shaping with optimal mass transportation and linear assignment problems. *Opt Express* 2018; 26(19): 24602-24613. DOI: 10.1364/OE.26.024602.
- [16] Doskolovich LL, Mingazov AA, Bykov DA, Andreev ES, Bezus EA. Variational approach to calculation of light field eikonal function for illuminating a prescribed region. *Opt Express* 2017; 25(22): 26378-26392. DOI: 10.1364/OE.25.026378.
- [17] Bykov DA, Doskolovich LL, Mingazov AA, Bezus EA, Kazanskiy NL. Linear assignment problem in the design of freeform refractive optical elements generating prescribed irradiance distributions. *Opt Express* 2018; 26(21): 27812-27825. DOI: 10.1364/OE.26.027812.
- [18] Mingazov AA, Bykov DA, Doskolovich LL, Kazanskiy NL. Variational interpretation of the eikonal calculation problem from the condition of generating a prescribed irradiance distribution [In Russian]. *Computer Optics* 2018; 42(4): 568-573. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-568-573.
- [19] Sulman MM, Williams JF, Russell RD. An efficient approach for the numerical solution of the Monge–Ampère equation. *Appl Numer Math* 2011; 61(3): 298-307. DOI: 10.1016/j.apnum.2010.10.006.
- [20] Doskolovich LL, Dmitriev AY, Moiseev MA, Kazanskiy NL. Analytical design of refractive optical elements generating one-parameter intensity distributions. *J Opt Soc Am A* 2014; 31(11): 2538-2544. DOI: 10.1364/JOSAA.31.002538.
- [21] Eisenhart LP. *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces*. Schwarz Press; 2008.

Author’s information

Leonid Leonidovich Doskolovich graduated with honors (1989) from S.P. Korolyov Kuibyshev Aviation Institute (presently, Samara National Research University), majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths (2001) degree from Samara National Research University. Head of laboratory of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, professor at Samara University’s Technical Cybernetics sub-department. Current research interests include diffractive optics, laser information technologies, nanophotonics. E-mail: leonid@smr.ru.

Albert Aidarovich Mingazov graduated from Samara State University in 2010, majoring in Mathematics. In 2012 he got the master degree in Mathematics at National Research University Higher School of Economics, in 2015 he graduated from the post-graduate course of the St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences. Candidate in Physics and Mathematics (2015). Currently he is a researcher at Diffractive Optics

laboratory of the Image Processing Systems Institute RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. E-mail: mingazov88@gmail.com.

Dmitry Alexandrovich Bykov graduated with honors (2009) from Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Mathematics and Computer Science. Doctor of Physics and Mathematics (2017). Senior researcher at the Samara University and at the Diffractive Optics Laboratory of the Image Processing Systems Institute RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. His current research interests include optics of resonant diffractive structures, magneto-optics of nanostructured materials, and electromagnetic diffraction theory. E-mail: bykovd@gmail.com.

Evgeni Anatolievich Bezus graduated with honors (2009) from the Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (SSAU), majoring in Applied Mathematics and Computer Science. Candidate in Physics and Mathematics (2012). Currently he is a researcher at the Diffractive Optics Laboratory of Image Processing Systems Institute (IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics RAS”) and an associate professor at Technical Cybernetics department of Samara University. His current research interests include nanophotonics, plasmonics and electromagnetic diffraction theory. E-mail: evgeni.bezus@gmail.com.

Received March 29, 2019. The final version – April 30, 2019.
