

---

## ОБОБЩЕННЫЕ ЭРМИТОВЫЕ СВЕТОВЫЕ ПУЧКИ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

*Котляр В.В., Сойфер В.А., Хонина С.Н.  
Институт систем обработки изображений РАН*

### *Аннотация*

Показано, что известные два типа световых пучков Гаусса-Эрмита, которые при распространении в пространстве сохраняют свою структуру, изменяясь масштабно, являются частным случаем обобщенных эрмитовых пучков. Показано, что для эффективного формирования отдельных мод Гаусса-Эрмита можно использовать фазовые элементы, пропускание которых равно знаковой функции соответствующего многочлена Эрмита.

### *Введение*

Интерес к эрмитовым пучкам или, точнее, модам Гаусса-Эрмита, обусловлен тем, что в свободном пространстве они распространяются без изменения своей структуры, изменяясь только масштабно, а в световых волокнах с параболическим профилем показателя преломления они распространяются и без изменения масштаба.

В работах [1,2] приведены разные аналитические выражения для мод Гаусса-Эрмита. Это послужило толчком к тому, чтобы выяснить степень различия и сходства двух разных форм эрмитовых пучков. Оказалось, что оба типа пучков являются частными случаями более общих модовых эрмитовых пучков.

Для того, чтобы сформировать в пространстве такие световые пучки, следует синтезировать на компьютере и изготовить по технологии микролитографии специальные дифракционные оптические элементы. Имеется ряд работ [3-5], по-

священных расчету таких фазовых оптических элементов. В [3] они названы моданами. Для их расчета используется метод Кирка-Джонса кодирования с пространственной несущей частотой [6].

В [4] для расчета оптического элемента, генерирующего одномодовый пучок, используется итеративная процедура и вводится в рассмотрение вспомогательная область.

В [5] расчет ведется на основе итеративной аппроксимации функции пропускания транспаранта конечной суммой ортогональных мод.

В данной работе показано, что с энергетической точки зрения оптимальным дифракционным элементом, формирующим однородный эрмитовый пучок является транспарант, функция пропускания которого равна знаковой функции соответствующего многочлена Эрмита.

Приведены также аналитические выражения, описывающие дифракцию Фраунгофера на таких фазовых элементах.

## 1. Два типа эрмитовых пучков

Известно, что частным решением параболического уравнения распространения

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) E(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

где  $k$  - волновое число света,  $(x, y)$  - поперечные и  $z$  - продольная координаты в пространстве,  $E(x, y, z)$  - медленно меняющаяся вдоль  $z$  комплексная амплитуда светового поля, являются модовые функции вида 0:

$$E_{mn}^{(1)}(x, y, z) = \left[\frac{\omega_0}{\omega(z)}\right]^{m+n+2} \times \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)}\right] H_n\left(\frac{x}{\omega(z)}\right) H_m\left(\frac{y}{\omega(z)}\right), \quad (2)$$

где

$$\omega(z) = \omega_0 \left(1 + \frac{iz}{z_0}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

$$z_0 = \frac{k\omega_0^2}{2} \quad (4)$$

$H_n(x)$  - многочлен Эрмита,  $\omega_0$  — минимальный радиус пучка при  $z = 0$ ,  $z_0$  — конфокальный параметр.

Функция  $E_{mn}^{(1)}$  при изменении расстояния  $z$  изменяется только масштабно, сохраняя свой вид. Поэтому решение (2) уравнения (1) можно назвать световой эрмитовой модой. Заметим, что моды (2) взаимно не ортогональны, что следует из справочного интеграла 0:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2} H_n(x) H_m(x) dx = (-1)^{\frac{m+n}{2}} \frac{m+n-1}{2} \Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right), \quad (5)$$

где  $\Gamma(x)$  - гамма-функция.

С другой стороны, известны взаимно ортогональные моды Гаусса-Эрмита, которые также являются частными решениями уравнения (1) [2]:

$$E_{mn}^{(2)}(x, y, z) = \frac{\omega_0}{a(z)} \exp[i(n+m+1)\eta(z)] \times \exp\left[\frac{-ik(x^2 + y^2)}{2R(z)}\right] \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{a^2(z)}\right] \times H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{a(z)}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{a(z)}\right), \quad (6)$$

где

$$a(z) = \omega_0 \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

$$\eta(z) = \arctg\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad (8)$$

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right), \quad (9)$$

$R(z)$  - радиус кривизны модового пучка.

Функции  $E_{mn}^{(1)}$  и  $E_{mn}^{(2)}$  описывают разные световые пучки, так как порождаются разными граничными условиями. При  $z=0$  вместо (2) и (6) получим:

$$E_{mn}^{(j)}(x, y, 0) = \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{\omega_0}\right] \times H_n\left(\frac{\theta_j x}{\omega_0}\right) H_m\left(\frac{\theta_j y}{\omega_0}\right), j=1,2, \quad (10)$$

$$\text{где } \theta_j = \begin{cases} 1, & j=1 \\ \sqrt{2}, & j=2 \end{cases}$$

Эти два типа модовых эрмитовых пучков отличаются также разным видом дифракции Фраунгофера. Световое поле  $E_{mn}^{(2)}$  является собственной функцией оператора Фурье [8]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(\sqrt{2}x) e^{-i2x\xi} dx = \sqrt{\pi} (-i)^n e^{-\xi^2} H_n(\sqrt{2}\xi) \quad (11)$$

Это свойство мод Гаусса-Эрмита сохранять свою структуру не только в ближней зоне дифракции Френеля, но и в дальней зоне Фраунгофера (или в фокальной плоскости линзы) используется для эффективного ввода лазерного излучения в световые волокна [3].

Световое поле  $E_{mn}^{(1)}$ , сохраняя свою структуру в зоне дифракции Френеля, в дальней зоне «вырождается» в поле с нулевой интенсивностью в центре. Это следует из выражения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) e^{-i2x\xi} dx = \sqrt{\pi} (-i)^n e^{-\xi^2} (2\xi)^n \quad (12)$$

## 2. Обобщенные эрмитовые пучки

Можно показать, что функции  $E_{mn}^{(1)}$  и  $E_{mn}^{(2)}$  из уравнений (2) и (6) являются частным случаем более общего решения уравнения (1), которое имеет вид:

$$E_{mn}^{(3)}(x, y, z) = A_{mn}(z) \exp[-B(z)(x^2 + y^2)] \times H_n\left(\frac{x}{C(z)}\right) H_m\left(\frac{y}{C(z)}\right), \quad (13)$$

где

$$A_{mn}(z) = \left(1 + \frac{i\gamma z}{z_0}\right)^{\frac{m+n}{2}} \left(1 + \frac{iz}{z_0}\right)^{-\frac{m+n}{2}-1}, \quad (14)$$

$$B(z) = \left[ \omega_0^2 \varepsilon^2 \left(1 + \frac{iz}{z_0}\right) \left(1 + \frac{i\gamma z}{z_0}\right) \right]^{-1} + k\gamma \left[ 2z_0 \left(1 + \frac{i\gamma z}{z_0}\right) \right]^{-1}, \quad (15)$$

$$C(z) = \omega_0 \varepsilon \left[ \left(1 + \frac{iz}{z_0}\right) \left(1 + \frac{i\gamma z}{z_0}\right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (16)$$

$\gamma=1-\varepsilon^2$ ,  $\varepsilon$  - модовый параметр. При  $\varepsilon=1$  решение (13) переходит в решение  $E_{mn}^{(1)}$ , а при  $\varepsilon = (\sqrt{2})^{-1}$  решение  $E_{mn}^{(3)}$  переходит в  $E_{mn}^{(2)}$ .

Обобщенные эрмитовы световые пучки (13) порождаются с помощью комплексной амплитуды при  $z=0$  вида:

$$E_{mn}^{(3)}(x, y, 0) = \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{\omega_0^2}\right] \times H_n\left(\frac{x}{\omega_0 \varepsilon}\right) H_m\left(\frac{y}{\omega_0 \varepsilon}\right). \quad (17)$$

Выражение для комплексной амплитуды светового пучка (13) в дальней зоне следует из соотношения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) e^{-i2x\xi} dx = \sqrt{\pi} (-i)^n \times (-\gamma)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{\varepsilon^2}} H_n\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right), \quad (18)$$

где  $\varepsilon < 1$ . При  $\varepsilon = (\sqrt{2})^{-1}$  уравнение (18) переходит в уравнение (11). При  $\varepsilon=1$  используя асимптотику  $H_n(\omega\xi) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 2^n (\omega\xi)^n$ , получим:

$$(-\gamma)^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right) = (2\xi)^n. \text{ То есть уравнение (18)}$$

переходит в уравнение (12).

### 3. Фазовый элемент для формирования эрмитова пучка

Для энергетически эффективного формирования эрмитовых пучков обоих типов предлагается в плоскости  $z=0$  располагать фазовый оптический элемент с функцией пропускания:

$$\tau_{mn}(x, y) = \text{sgn}[H_n(x)H_m(y)] = \text{sgn} H_n(x) \text{sgn} H_m(y), \quad (19)$$

где  $\text{sgn}(x)$  - знаковая функция.

Задача поиска оптимального фазового фильтра, формирующего эрмитовы пучки сходна с

с аналогичной задачей для формирования бesselовых пучков [9].

Покажем в одномерном случае, что транспарант (19) эффективно формирует эрмитовый пучок  $n$ -го порядка. Для этого разложим функцию  $\tau_n(x)$  по ортогональным многочленам:

$$\text{sgn} H_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} C_p^{(n)} H_p(x) \quad (20)$$

где

$$C_p^{(n)} = A \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}[H_n(x)] e^{-x^2} H_p(x) dx, \quad (21)$$

$A = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1}$ . Для четных номеров  $n=2l$  нули многочлена  $x_{k,l}$ :  $H_{2l}(x_{k,l})=0$ , будут расположены симметрично относительно точки  $x=0$ :  $x_{-k,l} = -x_{k,l}$ . Тогда интеграл в уравнении (21) можно представить в виде суммы интегралов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}[H_{2l}(x)] e^{-x^2} H_p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_p(x) dx + 2(-1)^l \sum_{k=1}^l (-1)^{k-1} \times \int_{-x_{k,l}}^{x_{k,l}} e^{-x^2} H_p(x) dx$$

С учетом справочного интеграла [7]:

$$\int_0^{\xi} e^{-x^2} H_n(x) dx = H_{n-1}(0) - e^{-\xi^2} H_{n-1}(\xi), \quad (23)$$

вместо (22) получим следующее выражение для коэффициентов разложения (21):

$$C_{2s}^{(2l)} = [2^{2s-1} (2s)! \sqrt{\pi}]^{-1} \times (-1)^l \sum_{k=1}^l (-1)^k e^{-x_{k,l}^2} H_{2s-1}(x_{k,l}). \quad (24)$$

При этом нечетные коэффициенты равны нулю.

Аналогично можно показать, что для нечетных многочленов Эрмита  $n=2l+1$  имеет место следующее выражение для коэффициентов разложения (21):

$$C_{2s+1}^{(2l+1)} = [2^{2s} (2s+1)! \sqrt{\pi}]^{-1} (-1)^l \times \left[ H_{2s}(0) + 2 \sum_{k=1}^l (-1)^k e^{-x_{k,l}^2} H_{2s}(x_{k,l}) \right]. \quad (25)$$

где

$$H_{2l+1}(x_{k,l}) = 0, \quad H_{2s}(0) = (-1)^s \cdot 2^s \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots \quad (25-1)$$

Четные коэффициенты равны нулю.

Таким образом, освещая оптический элемент с пропусканием (19) коллимированным гауссовым пучком с амплитудой  $\exp[-(x^2 + y^2)/2]$ , получим поле за элементом в виде суперпозиции эрмитовых пучков, один из которых будет энергетически преобладать среди прочих с эффективностью около 70%:

$$e^{-x^2/2} \operatorname{sgn}[H_n(x)] = \sum_{p=0}^{\infty} C_p^{(n)} \left( e^{-x^2/2} H_p(x) \right) \quad (26)$$

#### 4. Дифракция Фраунгофера для транспаранта со знаковой функцией пропускания

Для расчета дифракции Фраунгофера плоской волны на участке  $[-a, a]$  оптического элемента с пропусканием  $\operatorname{sgn}[H_n(x)]$ , где  $a$  должно быть больше максимального корня многочлена  $H_n(x)$ , аналогично работе [10], удобно использовать представления вида ( $n=2l$ ):

$$\operatorname{sgn}[H_{2l}(x)] = \operatorname{rect}\left(\frac{x}{a}\right) + 2(-1)^l \sum_{k=1}^l (-1)^{k-1} \operatorname{rect}\left(\frac{x}{x_{k,l}}\right), \quad (27)$$

$$\text{где } H_{2l}(x_{k,l}) = 0, \quad \operatorname{rect}\left(\frac{x}{x_0}\right) = \begin{cases} 1, & |x| \leq x_0 \\ 0, & |x| > x_0 \end{cases}.$$

Тогда преобразование Фурье от выражения (27) будет иметь вид:

$$P_{2l}(\xi) = \mathfrak{F}\{\operatorname{sgn}[H_{2l}(x)]\} = 2a \operatorname{sinc}(a\xi) + 2(-1)^l \sum_{k=1}^l (-1)^k 2x_{k,l} \operatorname{sinc}(x_{k,l}\xi), \quad (28)$$

где

$$\mathfrak{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ix\xi) dx, \quad (29)$$

$$\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$$

Параметр диафрагмы  $a$  выбирается из энергетических соображений.

Аналогично получаются выражения для нечетных полиномов Эрмита:

$$\operatorname{sgn}[H_{2l+1}(x)] = \left[ \operatorname{rect}\left(\frac{x}{a}\right) + 2(-1)^l \sum_{k=1}^l (-1)^{k-1} \operatorname{rect}\left(\frac{x}{x_{k,l}}\right) \right] \operatorname{sgn} x, \quad (30)$$

$$P_{2l+1}(\xi) = \mathfrak{F}\{\operatorname{sgn}[H_{2l+1}(x)]\} = -i \left\{ 2a \operatorname{cosec}(a\xi) + 2(-1)^l \sum_{k=1}^l (-1)^k \times \right. \\ \left. \times 2x_{k,l} \operatorname{cosec}(x_{k,l}\xi) \right\}, \quad (31)$$

$$\text{где } \operatorname{cosec}(x) = \frac{1 - \cos x}{x}.$$

#### 5. Пример

Пусть требуется сформировать первую моду Гаусса-Эрмита при  $n=1$ ,  $m=0$ . Для этого в плоскости  $z=0$ , следует расположить транспарант с

пропусканием  $H_1(x) \exp(-x^2/2)$ . Тогда в фокальной плоскости линзы согласно уравнению (11) сформируется световое поле с комплексной амплитудой, пропорциональной выражению:

$$-i\sqrt{\pi} H_1(\xi) \exp(-\xi^2/2)$$

где  $H_1(\xi) = 2\xi$ .

Если в плоскости  $z=0$  разместить энергетически более выгодный фазовый элемент с пропусканием  $\operatorname{sgn}[H_1(x)] = \operatorname{sgn}(x)$ , то согласно уравнению (25) в пространстве за фильтром сформируется суперпозиция световых мод:

$$\operatorname{sgn} x = \sum_{s=0}^{\infty} C_{2s+1}^{(1)} H_{2s+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( H_1(x) - \frac{1}{12} H_3(x) + \frac{1}{160} H_5(x) - \dots \right), \quad (32)$$

Освещая такой фазовый элемент коллимированным гауссовым пучком, получим, что согласно уравнению (32) в частотной плоскости сформируется световое поле с амплитудой, пропорциональной выражению:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x) e^{-x^2/2} e^{-ix\xi} dx = \sqrt{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} C_{2s+1}^{(1)} (-i)^{2s+1} e^{-\xi^2/2} H_{2s+1}(\xi) = -i e^{-\xi^2/2} \left( H_1(\xi) - \frac{1}{12} H_3(\xi) + \frac{i}{160} H_5(\xi) - \dots \right), \quad (33)$$

Отношение энергий световых пучков, описываемых вторым и первым слагаемыми в уравнении (33) равно:

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} H_3^2(\xi) e^{-\xi^2} d\xi}{(12)^2 \int_{-\infty}^{\infty} H_1^2(\xi) e^{-\xi^2} d\xi} \approx 0.167 \quad (34)$$

Таким образом, в первом слагаемом суммы (33), описывающем первую моду Гаусса-Эрмита, содержится более 80% всей энергии светового пучка.

Еще более эффективным способом формирования первой эрмитовой моды оказывается способ освещения фазового фильтра с пропусканием:

$$\operatorname{sgn}[H_1(x)] \operatorname{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (35)$$

не гауссовым пучком, а плоской световой волной. В этом случае в фокальной плоскости линзы сформируется световое поле с амплитудой, описываемой выражением:

$$\int_{-a}^a \operatorname{sgn}(x) e^{-ix\xi} dx = -2ai \operatorname{cosec}(a\xi), \quad (36)$$

где функция  $\operatorname{cosec}(x)$  определена в уравнении (31).

Взаимная корреляция светового поля (36) и первой эрмитовой моды оценивается выражением:

$$\eta = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} [2a \operatorname{cosec}(a\xi)] H_1(\xi) e^{-\xi^2/2} d\xi \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |2a \operatorname{cosec}(a\xi)|^2 d\xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |H_1(\xi) e^{-\xi^2/2}|^2 d\xi} = \frac{4}{a\sqrt{\pi}} (1 - e^{-a^2/2})^2 \quad (37)$$

Размер апертуры фазового элемента (35)  $[-a, a]$  выбирается из условия максимума выражения (37), который достигается при  $a=2.2$ . При этом корреляция (37) будет равна  $\eta=0.85$ .

Таким образом первая мода Гаусса-Эрмита содержится в световом поле (36) с эффективностью около 85%.

### 6. Численные результаты

При численном моделировании использовались следующие параметры: размерность массивов  $N=256$ , область изменения аргумента  $x \in [-8, 8]$ , длина волны  $\lambda=0.63 \mu\text{m}$ , фокусное расстояние  $f=100 \text{ mm}$ .

На рис. 1а показан эрмитовый пучок

$$E_3^{(1)}(x) = H_3(x) \exp(-x^2), \quad x \in [-8, 8]. \quad (38)$$

На рис. 1б,в показаны соответственно интенсивность (квадрат модуля) и фаза (аргумент) Фурье-преобразования от функции (38).

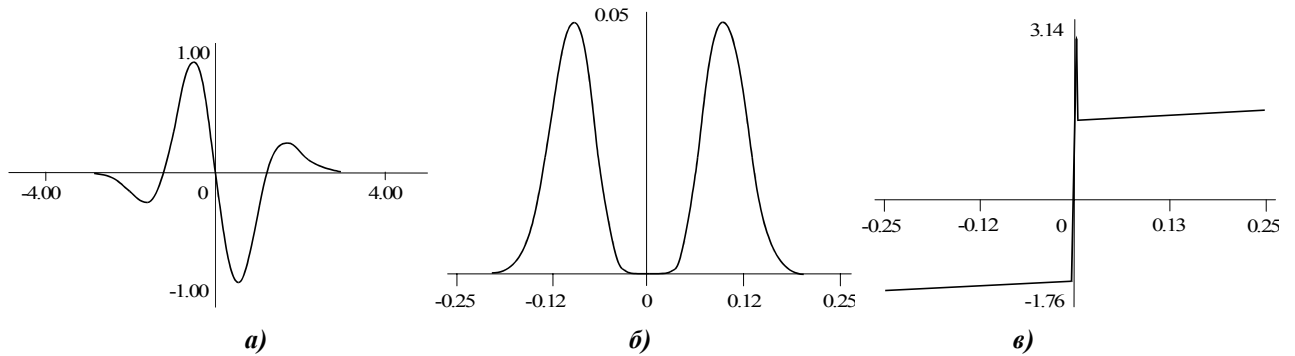


Рис. 1.

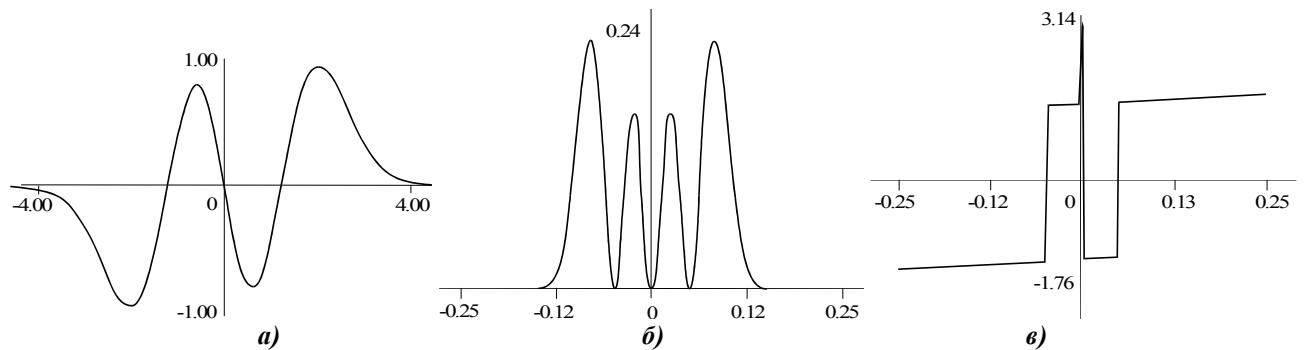


Рис. 2.

Для сравнения на рис. 2 показан результат дифракции Фраунгофера для второго типа эрмитовых пучков. На рис. 2а показан сам пучок

$$E_3^{(2)}(x) = H_3(x) \exp(-x^2/2), \quad x \in [-8, 8], \quad (39)$$

а на рис. 2б,в показаны интенсивность и фаза его Фурье-образа, соответственно.

На рис. 3а показан результат бинаризации эрмитового пучка (39): кривая 1 - это функция

$$\tau_3(x) = \operatorname{sgn}[H_3(x)], \quad x \in [-3, 3], \quad (40)$$

а кривая 2 - это функция (39). На рис. 3б,в показаны соответственно интенсивность и фаза Фурье-преобразования от бинарной функции (40) при  $x \in [-3, 3]$ . Диапазон изменения аргумента  $x$  функции (40) выбран таким образом, чтобы корреляция  $\eta$ , аналогичная определенной в уравнении (37), была максимальной. В этом случае корреляция между функциями интенсивности, показанных на рис. 2б и рис. 3б составляет 0.84. Поэтому можно заключить, что 84% световой энергии плоского пучка, освещающего фазовый элемент (40), будет идти на формирование эрмитового пучка (39). На рис. 4 показана зависимость взаимной корреляции  $\eta$  от полудлины отрезка  $[-a, a]$  для эрмитового пучка третьего порядка  $n=3$ . В Таблице приведены оптимальные размеры отрезков  $[-a, a]$ , на которых заданы бинарные функции  $\operatorname{sgn}[H_n(x)]$ ,  $n = \overline{1, 7}$  и значения взаимной корреляции между Фурье-образами от функций (39) и (40) при  $n = \overline{1, 7}$ .

Таблица

Номер моды, $n$	1	2	3	4	5	6	7
Оптимальный размер апертуры, $a$ (mm)	2,1	2,6	3,0	3,4	3,7	4	4,2
Корреляция, $\eta$	0,86	0,84	0,84	0,82	0,82	0,81	0,81

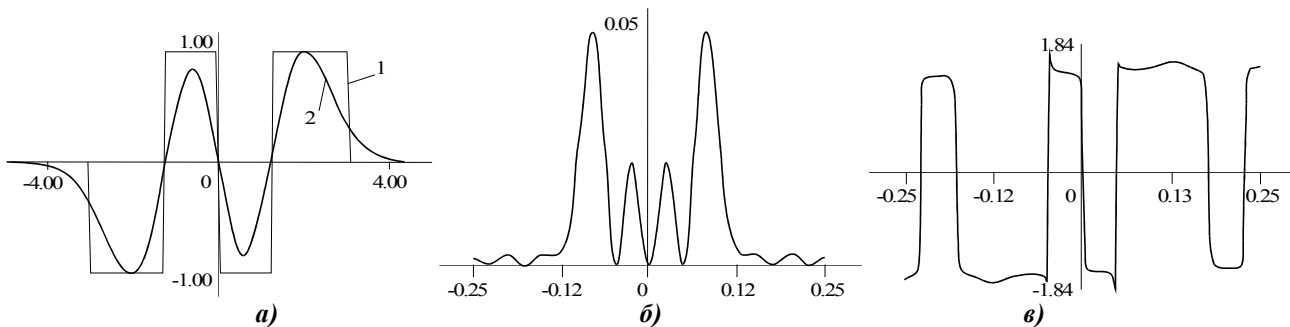


Рис. 3.

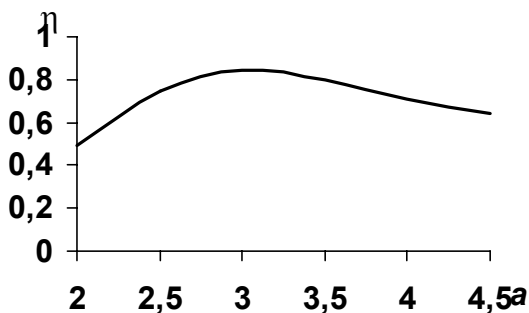


Рис. 4

Из Таблицы видно, что с ростом номера эрмитового пучка энергетическая эффективность  $\eta$  медленно спадает с 86% до 81% ( $n \leq 7$ ).

### Заключение

В работе получены следующие результаты:  
 получено выражение для обобщенных эрмитовых пучков, сохраняющих свою структуру при распространении в зоне дифракции Френеля (ур. (13)-(16));  
 получены разложения в ряд по многочленам Эрмита бинарных знаковых функций, которые можно рассматривать как функции пропускания оптических элементов, для эффективного формирования эрмитовых пучков (ур. (20), (24), (25));  
 получены выражения, описывающие дифракцию Фраунгофера плоской волны на бинарной знаковой функции от многочлена Эрмита (ур. (28), (31));  
 показано, что знаковые бинарные функции можно рассматривать как пропускание оптических элементов, формирующих эрмитовые пучки с эффективностью не меньше 80% (ур. (34), (37) и Таблица).

### Благодарность

Эта работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 96-01-00021).

### Литература

1. М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.Л. Сухоруков Теория волн, М., Наука, 1979.
2. А. Ярив. Введение в оптическую электронику, М., Высшая школа, 1983.
3. V.A. Soifer, M.A. Golub. Laser beam mode selection by computer-generated holograms, CRC Press, Boca Raton, 1994.
4. М.А. Голуб, В.С. Павельев, В.А. Сойфер. Построение итеративного алгоритма расчета фазовых дифракционных элементов, формирующих заданное одномодовое распределение на основе применения метода обобщенных проекций, Компьютерная оптика, М., МЦИТИ, 1995, вып. 14-15, часть 2, с. 85-93.
5. V.A. Soifer, V.V. Kotlyar, L.L. Doskolovich. Iterative methods for diffractive optical elements computation, Taylor and Francis, London, 1997.
6. J.P. Kirk, A.L. Jones. Phase-only complex-valued spatial filter, J. Opt. Soc. Am., 1971, v. 61, no. 8, p. 1023.
7. А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Марычев. Интегралы и ряды. Специальные функции, М., Наука, 1983.
8. В.И. Смирнов. Курс высшей математики, М., Наука, 1971, т. IV, ч. 1
9. A. Fedotovskiy, K. Lehovec. Optical filter design for annular imaging, Appl. Opt., 1974, v. 13, № 12, p. 2919-2923.
10. J. Mait. Design of binary-phase and multiphase Fourier grating for array generation, J. Opt. Soc. Am. A, 1990, v. 7, no. 8, p. 1514-1528.

