# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖАЮЩИХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ВКЛЮЧАЮЩИХ ГРАДИЕНТНЫЕ И ДИФРАКЦИОННЫЕ ЛИНЗЫ

*С.А. Степанов, Г.И. Грейсух, Е.Г. Ежов*
*Пензенская государственная архитектурно-строительная академия*

Рассмотрены подходы к решению системы уравнений, обеспечивающей заданные параксиальные и аберрационные характеристики оптической системы. Показаны пути выделения из этой системы уравнений ряда подсистем, которые могут быть решены аналитически. Обсуждается практическая реализация итерационных методов решения системы компенсационных уравнений высокого порядка.

Задача определения конструктивных параметров изображающей оптической системы, обладающей заданными параксиальными и аберрационными характеристиками, сводится к решению соответствующей системы уравнений. Она включает уравнения для фокусного расстояния $f'$ увеличения $V$ (или заднего фокального отрезка $s'_F$ при расположении предмета в бесконечности) и коэффициентов устраняемых аберраций. Если предполагается устранение всех монохроматических аберраций третьего порядка, то общее число уравнений, включающее параксиальные и компенсационные уравнения, равно семи. В случае устранения всех монохроматических аберраций третьего и пятого порядков общее число уравнений увеличивается до шестнадцати. При дополнительном требовании устранения хроматизма положения и увеличения число уравнений возрастает на два и т.д. Наивысшая степень уравнений определяется порядком устраняемых аберраций и, следовательно, растет с увеличением числа уравнений в системе. Кроме того, если оптическая система содержит градиентные элементы, то даже уравнения для ее гауссовых характеристик относительно некоторых параметров являются трансцендентными.

С учетом вышеизложенного возможно несколько путей решения указанной системы уравнений. Во-первых, это решение системы в целом итерационными методами. Такой путь при использовании современных персональных компьютеров весьма эффективен, если решаемая система включает уравнения, обеспечивающие устранение аберраций не выше третьего порядка. При расчете же многоэлементных оптических систем, наборы коррекционных параметров которых позволяют решать задачу устранения аберраций не только третьего, но и пятого или даже пятого и седьмого порядков, наиболее эффективным, на наш взгляд, является другой путь, заключающийся в выделении из общей системы уравнений нескольких подсистем, которые могут быть решены либо аналитически, либо независимо от других уравнений. Такой подход оказывается особенно успешным при построении оптической системы на основе дифракционных и радиально-градиентных линз, а также при использовании асферических преломляющих поверхностей.

Первая из выделяемых подсистем включает параксиальные уравнения, например, уравнения, связывающие величины $f'$ и $s'_F$ с конструктивными параметрами оптической системы. Если оптическая система включает градиентные и дифракционные линзы, то явный вид этих уравнений наиболее просто получить, воспользовавшись аппаратом гауссовых коэффициентов [1], а решать эти уравнения - относительно оптических сил преломляющих поверхностей и дифракционных линз. В случае, когда общее число преломляющих поверхностей и дифракционных линз, составляющих оптическую систему, не меньше трех, к параксиальным уравнениям может быть добавлено и близкое к ним по структуре уравнение, определяющее условие Петцваля.

Процедуры формирования и решения указанной подсистемы уравнений применительно к радиально-градиентному синглету и дублету, состоящему из радиально-градиентной и дифракционной линз, приведены в работах [2, 3]. Здесь в качестве примера рассмотрим соответствующие процедуры для оптической системы, состоящей из трех склеенных между собой радиально-градиентных линз.

Если положить фокусное расстояние триплета, равным единице, а пространства предметов и изображений – заполненными воздухом, то оптическая сила и задний фокальный отрезок будут связаны с гауссовыми коэффициентами триплета следующими соотношениями [4]

$$\Phi = -C = 1; s'_F = A. \tag{1}$$

Сами же гауссовы коэффициенты триплета могут быть найдены путем перемножения матриц [1,3]

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C_4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \gamma_3 & \alpha_3 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C_1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Входящий в выражение (2) гауссов коэффициент $k$-й преломляющей поверхности равен с точностью до знака оптической силе этой поверхности

$$C_k = (n_0 - n'_0)c_k, \tag{3}$$

где $n_0$ и $n'_0$ - показатели преломления среды на оптической оси слева и справа от поверхности, $c_k$ - кривизна этой поверхности. Также входящие в выражение (2) гауссовы коэффициенты $m$-й радиально-градиентной среды (показатель преломления которой описывается рядом вида

$$n = \sum_{p=0} n_p \rho^{2p}, \tag{4}$$

где $\rho$ - расстояние от оси) вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned} \alpha_m &= F_1^{(m)}\left(d_m\sqrt{\left|\bar{n}_1^{(m)}\right|}\right) \\ \beta_m &= \frac{F_2^{(m)}\left(d_m\sqrt{\left|\bar{n}_1^{(m)}\right|}\right)}{n_0^{(m)}} \\ \gamma_m &= 2n_0^{(m)}n_1^{(m)}\beta_m \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где $d_m$ - толщина $m$ -й среды, $F_1(\ldots)$ и $F_2(\ldots)$ - функции вида

$$\left.\begin{aligned} F_1\left(d\sqrt{|\bar{n}_1|}\right) &= \begin{cases} \cos\left(d\sqrt{-\bar{n}_1}\right), (n_1 \le 0) \\ \operatorname{ch}\left(d\sqrt{\bar{n}_1}\right), (n_1 > 0) \end{cases} \\ F_2\left(d\sqrt{|\bar{n}_1|}\right) &= \begin{cases} \dfrac{\sin\left(d\sqrt{-\bar{n}_1}\right)}{\sqrt{-\bar{n}_1}}, (n_1 \le 0) \\ \dfrac{\operatorname{sh}\left(d\sqrt{\bar{n}_1}\right)}{\sqrt{\bar{n}_1}}, (n_1 > 0) \end{cases} \end{aligned}\right\}, \tag{6}$$

$$\bar{n}_1 = \frac{2n_1}{n_0}.$$

Обратимся теперь к уравнению, определяющему условие Петцваля. Применительно к рассматриваемому триплету это уравнение имеет вид [5]

$$\frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{n_0^{(1)}} + \frac{C_2}{n_0^{(1)}n_0^{(2)}} + \frac{C_3}{n_0^{(2)}n_0^{(3)}} + \frac{C_4}{n_0^{(3)}}\right) + \sum_{m=1}^{3}\frac{n_1^{(m)}d_m}{\left[n_0^{(m)}\right]^2} = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) может быть легко разрешено относительно любого гауссова коэффициента поверхности, например, $C_4$. В результате получим

$$C_4 = E + GC_2 + HC_3, \tag{9}$$

где

$$\left.\begin{aligned} E &= -n_0^{(3)}\left(\frac{C_1}{n_0^{(1)}} + 2\sum_{m=1}^{3}\frac{n_1^{(m)}d_m}{\left[n_0^{(m)}\right]^2}\right), \\ G &= -\frac{n_0^{(3)}}{n_0^{(1)}n_0^{(2)}}; H = -\frac{1}{n_0^{(2)}} \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Перемножая матрицы, входящие в уравнение (2) и используя соотношение (9), приведем уравнения, определяющие задний фокальный отрезок и оптическую силу триплета, к виду

$$\left.\begin{aligned} P_1C_2C_3 + Q_1C_2 + R_1C_3 &= S_1 \\ P_2C_2C_3 + Q_2C_2 + R_2C_3 &= S_2 \end{aligned}\right\}, \tag{11}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&P_1 = C_1\beta_1\beta_2\beta_3 + \alpha_1\beta_2\beta_3;\\
&Q_1 = \alpha_2 C_1\beta_1\beta_3 + \alpha_3 C_1\beta_1\beta_2 +\\
&\qquad + \alpha_1\alpha_2\beta_3 + \alpha_1\alpha_3\beta_2;\\
&R_1 = \alpha_1 C_1\beta_2\beta_3 + \alpha_2 C_1\beta_1\beta_3 +\\
&\qquad + \alpha_1\alpha_2\beta_3 + \beta_2\beta_3\gamma_1;\\
&S_1 = s'_F - \alpha_1\alpha_2 C_1\beta_3 - \alpha_1\alpha_3 C_1\beta_2 -\\
&\qquad - \alpha_2\alpha_3 C_1\beta_1 - C_1\beta_1\beta_3\gamma_2 -\\
&\qquad - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_3\gamma_1 -\\
&\qquad - \alpha_3\beta_2\gamma_1 - \alpha_1\alpha_2\alpha_3
\end{aligned}\right\}, \qquad (12)$$

$$\left.\begin{aligned}
&P_2 = \alpha_3 C_1\beta_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_3\beta_2;\\
&Q_2 = s'_F G + \alpha_2\alpha_3 C_1\beta_1 + C_1\beta_1\beta_2\gamma_3 +\\
&\qquad + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\beta_2\gamma_3;\\
&R_2 = s'_F H + \alpha_1\alpha_3 C_1\beta_3 + \alpha_2\alpha_3 C_1\beta_1 +\\
&\qquad + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\beta_2\gamma_1;\\
&S_2 = -1 - s'_F E - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 C_1 -\\
&\qquad - \alpha_1 C_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_2 C_1\beta_1\gamma_3 -\\
&\qquad - \alpha_3 C_1\beta_1\gamma_2 - \alpha_1\alpha_2\gamma_3 -\\
&\qquad - \alpha_1\alpha_3\gamma_2 - \alpha_2\alpha_3\gamma_1 - \gamma_1\beta_2\gamma_3
\end{aligned}\right\}, \qquad (13)$$

Из структуры уравнений (9) и (11) видно, что они могут быть легко разрешены относительно гауссовых коэффициентов $C_2$, $C_3$, и $C_4$, что позволяет аналитически определить оптические силы соответствующих поверхностей триплета.

Следующие подсистемы, которые могут быть выделены из общей системы уравнений и решены аналитически, относятся к компенсационным уравнениям, определяющим условия устранения монохроматических аберраций третьего, пятого и т.д. порядков. Возможность выделения таких подсистем основано на том, что каждый из обнуляемых аберрационных коэффициентов может быть представлен в виде линейной функции соответствующих коэффициентов разложения показателей преломления неоднородных сред. Например, для радиально-градиентного триплета любой аберрационный коэффициент ($2j + 1$)-го порядка (где $j$ =1,2,...) может быть представлен в виде

$$M_{2j+1} = A_0 + \sum_{m=1}^{3} A_m n_{j+1}^{(m)}. \qquad (14)$$

Отметим, что аналогичным свойством обладают коэффициенты асферической деформации эйконала записи дифракционных линз и коэффициенты асферической деформации преломляющих асферических поверхностей. Таким образом, общее число компенсационных уравнений, входящих в каждую из выделяемых подсистем, равно суммарному числу неоднородных сред, дифракционных линз и асферических поверхностей проектируемой оптической системы.

Если оптическая система состоит из радиально-градиентных линз, то коэффициенты $M_{2j+1}$, относящиеся к области аберраций третьего порядка могут быть получены аналитически с помощью результатов работы [5]. Соответствующие же коэффициенты в области аберрации пятого порядка могут быть получены как аналитически с помощью результатов работы [6], так и численно на основе расчета хода псевдолучей [7,3].

Возвращаясь к приведенному выше примеру радиально-градиентного склеенного триплета и ставя задачу одновременного устранения у него всех монохроматических аберраций третьего и пятого порядков, из общей системы шестнадцати уравнений для аналитического решения можно выделить три подсистемы, в каждую из которых входит по три уравнения. В этом случае система из оставшихся семи нелинейных трансцендентных уравнений решается итерационно относительно, например, неизвестных $c_1$, $n_1^{(m)}$ и $d_m$, ($m$ =1-3), а величины $s'_F$ и $n_0^{(m)}$ рассматриваются как свободные параметры.

Итерационное решение рассматриваемой системы целесообразно проводить в два этапа. На первом этапе, когда из физических соображений определена лишь область возможного существования решения, - воспользоваться методом наискорейшего спуска, который, с одной стороны не очень чувствителен к выбору начального приближения, но, с другой стороны, отличается низкой скоростью сходимости вблизи искомого решения. На втором этапе - использовать метод Ньютона, который как раз имеет высокую скорость сходимости, но, как правило, расходится при отсутствии хорошего начального приближения [8].

Метод наискорейшего спуска предполагает минимизацию функции, составленной из суммы квадратов левых частей решаемых уравнений (при условии, что их правые части равны нулю). В данном случае - это функция $F(c_1, n_1^{(m)}, d_m)$, представляющая собой сумму квадратов обнуляемых аберрационных коэффициентов.

Для вычисления шага итерации необходимо знать первые и вторые частные производные функции $F$ по искомым параметрам. Если дифференцирование производится численно, а устраняются аберрации пятого или даже более высокого порядка, то, как показывает практика расчетов, обеспечить сходимость метода наискорейшего спуска удается лишь при высоких точностях вычислений. Поэтому при компьютерном расчете приходится использовать числовые данные повышенной точности, например, типа long double языков программирования C и C++.

Необходимо также отметить, что метод наискорейшего спуска позволяет найти наборы конструктивных параметров, соответствующие минимумам функции $F$, не различая при этом локальные и глобальные минимумы. Выделение областей глобальных минимумов и уточнение их координат, т.е. определение конструктивных параметров оптической системы, обеспечивающих устранение компенсируемых аберраций с заданной точностью, и осуществляется на втором этапе методом Ньютона.

### *Список литературы*


1. Грейсух Г.И., Ефименко И.М., Степанов С.А. Оптика градиентных и дифракционных элементов. М.: Радио и связь, 1990. 136 с.
2. Грейсух Г.И., Степанов С.А. Возможности коррекции монохроматических аберраций градиентных линз с радиальным распределением показателя преломления// Опт. и спектр. 1995. Т.79. № 1. С. 173-176.
3. Greisukh G.I., Bobrov S.T., Stepanov S.A. Optics of Diffractive and Gradient - Index Elements and Systems.Bellingham WA;SPIE Press,1997. 412p.
4. Герцбергер М. Современная геометрическая оптика. М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. 487 с.
5. Sands P.J. Third-Order Aberration of Inhomogeneous Lenses// J.Opt.Soc.Am. 1970. V.60. N 11. P.1436-1443.
6. Fantone S.D. Fifth-Order Aberration Theory of Gradient-Index Optics// J.Opt.Soc.Am. 1983. V.73. № 9. P.1149-1164.
7. Степанов С.А., Грейсух Г.И. Компьютерный расчет оптических систем в области аберраций высших порядков// Компьютерная оптика. Вып.16. М.-Самара, 1996. С.9-12.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука. 1977. 832 с.