АБЕРРАЦИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ГРАДИЕНТНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ОБЛАДАЮЩИХ ДВОЯКОЙ СИММЕТРИЕЙ

Р. Е. Ильинский
Московский Государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Для градиентных оптических систем, обладающих двоякой симметрией, получены в явном виде коэффициенты геометрических аберраций третьего порядка.

В настоящее время в технической оптике наиболее часто используются осесимметричные оптические системы. Но для решения целого ряда важных задач необходимы оптические системы, обладающие двумя плоскостями симметрии [1],[2],[3],[4] (анаморфотные оптические системы) . В книге [1] изложена теория аберраций третьего порядка анаморфотной оптической системы, в которой показатель преломления каждой оптической среды является постоянным в любой точке данной среды. Поправки к этой теории изложены в [5].

С 60-70 годов нашего века в технической оптике находят применение градиентные оптические элементы созданные на основе сред с неоднородным по объему среды показателем преломления (градиентные среды). Оптическая система, содержащая хотя бы один градиентный элемент, носит название градиентной оптической системы. Градиентная оптическая система является осесимметричной тогда, когда оси симметрии оптических поверхностей и функций распределения показателя преломления градиентных сред лежат на одной прямой - оптической оси. Теория аберраций третьего порядка градиентных оптических систем, обладающих осевой симметрией, изложена в работах [6],[7].

В настоящей работе рассматриваются аберрации третьего порядка градиентных оптических систем, обладающих двумя плоскостями симметрии. Такие системы состоят из m поверхностей и заключенных между ними однородных и градиентных оптических сред. Каждая поверхность обладает двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии. Функции распределения показателя преломления градиентных сред также имеют две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии. В рассматриваемой оптической системе плоскости симметрии всех поверхностей и всех функций распределения показателя преломления совпадают, т.к. в противном случае свойство двойной симметрии не может быть удовлетворено. Среды пространств предметов и изображений являются однородными. Плоскости предмета и изображения оптически сопряжены. Поэтому любой параксиальный луч, исходящий из осевой предметной точки, приходит в осевую точку изображения. Плоскость меридионального сечения оптической системы совпадает с первой плоскостью симметрии оптической системы, а плоскость сагиттального сечения оптической системы совпадает со второй плоскостью симметрии оптической системы. Оси OZ всех декартовых систем координат, в которых описываются уравнения оптических поверхностей и функции распределения показателей преломления, совпадают с оптической осью; оси OY сонаправлены и лежат в меридиональном сечении; оси OX сонаправлены и лежат в сагиттальном сечении.

В выражениях для аберрационных коэффициентов мы будем использовать величины, характеризующие прохождение через оптическую систему четырех нулевых лучей [1]:

1. меридионального апертурного, исходящего из осевой точки предмета и идущего в меридиональном сечении оптической системы;

2. сагиттального апертурного, исходящего из осевой точки предмета и идущего в сагиттальном сечении оптической системы;

3. меридионального полевого, проходящего через центр апертурной диафрагмы и идущего в меридиональном сечении оптической системы;

4. сагиттального полевого, проходящего через центр апертурной диафрагмы и идущего в сагиттальном сечении оптической системы.

В качестве величин, характеризующих каждый из этих четырех нулевых лучей, принимаются высота и наклон нулевого луча [1],[6],[7],[2]. При этом под высотой нулевого луча понимается расстояние от оптической оси до точки пересечения нулевого луча с плоскостью, отстоящей от начала координат на расстоянии z; под наклоном нулевого луча понимается тангенс угла между касательной к лучу в точке его пересечения с указанной плоскостью и оптической осью системы [6],[7]. Высота и наклон нулевого луча являются функциями расстояния z. В работах [1],[2] вместо слова "наклон" для названия той же самой характеристики используется слово "угол". Это менее точно, но такое название укоренилось в отечественной литературе.

Обозначим [1]:

(h_y, α) - высота и наклон меридионального апертурного луча;

(h_x, A) - высота и наклон сагиттального апертурного луча;

(H_y, β) - высота и наклон меридионального полевого луча;

(H_x, B) - высота и наклон сагиттального полевого луча.

Рассмотрим расчет нулевых лучей в градиентной оптической системе, обладающей двумя плоскостями симметрии. Пусть функция распределения квадрата показателя преломления градиентной среды имеет вид

$$\begin{aligned} n^2(x,y,z) &= n_0^2(z) + n_{11}(z)\,x^2 + \\ &+ n_{12}(z)\,y^2 + n_{21}(z)\,x^4 + \\ &+ n_{22}(z)\,x^2 y^2 + n_{23}(z)\,y^4 + \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

где $n_0(z)$, $n_{11}(z)$, $n_{12}(z)$, $n_{21}(z)$, $n_{22}(z)$, $n_{23}(z)$ функции, зависящие только от координаты z.

В результате анализа дифференциалов луча первого порядка [8] для градиентных сред, с функцией распределения квадрата показателя преломления (1), мной получены системы дифференциальных уравнений, описывающие траектории нулевых лучей в градиентных средах. Ход нулевого луча, принадлежащего меридиональному сечению оптической системы, описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi(z)}{dz} = -\gamma(z)\,, \tag{2}$$

$$\frac{d\big(n_0(z)\gamma(z)\big)}{dz} = -\frac{n_{12}(z)}{n_0(z)}\xi(z)\,, \tag{3}$$

где $\xi(z)$ и $\gamma(z)$ высота и наклон нулевого луча.

В качестве начальных условий при решении системы дифференциальных уравнений (2) - (3) используются высота и наклон нулевого луча в начальной точке траектории: $\xi_0 = \xi(0)$ и $\gamma_0 = \gamma(0)$. Ход нулевого луча, принадлежащего сагиттальному сечению оптической системы, описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varsigma(z)}{dz} = -\Gamma(z)\,, \tag{4}$$

$$\frac{d\big(n_0(z)\Gamma(z)\big)}{dz} = -\frac{n_{11}(z)}{n_0(z)}\varsigma(z)\,, \tag{5}$$

где $\zeta(z)$ и $\Gamma(z)$ высота и наклон нулевого луча.

В качестве начальных условий при решении системы дифференциальных уравнений (4) - (5) используются высота и наклон нулевого луча в начальной точке траектории: $\zeta_0 = \zeta(0)$ и $\Gamma_0 = \Gamma(0)$.

Рассмотрим оптическую поверхность, разделяющую (в самом общем случае) две градиентные среды с показателями преломления n(x,y,z) и n'(x,y,z). Уравнение, определяющее форму такой поверхности, можно, согласно [1], представить в виде:

$$\begin{aligned} z &= \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{2}y^2 + b_1 x^4 + \\ &+ b_2 x^2 y^2 + b_3 y^4 + \ldots \end{aligned}\,, \tag{6}$$

где C_2, C_1 - меридиональная и сагиттальная кривизны поверхности в точке с координатами x=0, y=0, z=0.

В системе координат рассматриваемой поверхности функции распределений квадратов показателей преломления оптических сред имеют вид

$$\begin{aligned} n^2(x,y,z) &= n_0^2(z) + n_{11}(z)\,x^2 + \\ &+ n_{12}(z)\,y^2 + \ldots \end{aligned}\,, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \big(n'(x,y,z)\big)^2 &= \big(n'_0(z)\big)^2 + \\ & n'_{11}(z)\,x^2 + n'_{12}(z)\,y^2 + \ldots \end{aligned}\,, \tag{8}$$

Функция (7) описывает распределение показателя преломления в оптической среде, расположенной (по ходу луча) перед поверхностью (6), а функция (8) описывает распределение показателя преломления в оптической среде, находящейся за поверхностью (6).

Анализ дифференциалов луча первого порядка [8] показал, что выражения, описывающие преломление нулевого луча на границе двух градиентных сред, не будут отличаться от аналогичных выражений, описывающих преломление нулевого луча на границе двух однородных сред [1]. Для меридионального нулевого луча эти выражения имеют вид

$$\gamma' = \gamma \frac{n_0(0)}{n'_0(0)} + \frac{n'_0(0) - n_0(0)}{n'_0(0)} C_2 \xi,$$

где γ', γ - наклоны нулевого луча после и до преломления;

ξ - высота нулевого луча на поверхности.

Преломление нулевого луча, идущего в сагиттальном сечении, будет описываться аналогичной формулой

$$\Gamma' = \Gamma \frac{n_0(0)}{n'_0(0)} + \frac{n'_0(0) - n_0(0)}{n'_0(0)} C_1 \varsigma, \tag{9}$$

где Γ', Γ - наклоны нулевого луча после и до преломления;

ζ - высота нулевого луча на поверхности.

Траектория реального луча (в общем случае он является пространственной кривой) может быть описана с помощью двух векторных переменных [7]: вектора линейных координат $R(z)=(x(z);y(z);z)^T$ и вектора $\Xi(z)=dR/dz=(\chi(z);\eta(z);1)^T$, где $\chi(z)$ - тангенс угла луча с меридиональной плоскостью оптической системы, $\eta(z)$ - тангенс угла луча с сагиттальной плоскостью оптической системы.

Координаты векторов R_0 и Ξ_0 на входе луча в оптическую систему представим в виде [6],[7]:

$$x_0 = h_{x0}\Omega + H_{x0}W, \tag{10}$$

$$y_0 = h_{y0}\omega + H_{y0}w, \tag{11}$$

$$\chi_0 = \mathrm{A}_0\Omega + \mathrm{B}_0 W, \tag{12}$$

$$\eta_0 = \alpha_0\omega + \beta_0 w, \tag{13}$$

где w,W - меридиональная и сагиттальная составляющие нормированных координат луча в предметной плоскости оптической системы;

ω,Ω - меридиональная и сагиттальная составляющие нормированных координат луча в плоскости входного зрачка;

индекс "0" означает, что величина относится к плоскости XOY декартовой системы координат, в которой задано уравнение первой поверхности. Подробное описание нормированных координат дано в [7]. В параксиальном приближении соотношения (10)-(13) распространяются на всю оптическую систему [6],[7]:

$$x(z) = h_x(z)\Omega + H_x(z)W, \tag{14}$$

$$y(z) = h_y(z)\omega + H_y(z)w, \tag{15}$$

$$\chi(z) = \mathrm{A}(z)\Omega + \mathrm{B}(z)W, \tag{16}$$

$$\eta(z) = \alpha(z)\omega + \beta(z)w, \tag{17}$$

Меридиональная $\delta g'$ и сагиттальная $\delta G'$ составляющие геометрической аберрации третьего порядка в плоскости изображения оптической системы, обладающей двоякой симметрией, выражаются через нормированные координаты ω,Ω,w,W и коэффициенты σ, зависящие только от конструкции системы. В соответствии с [1] выражения для геометрических аберраций третьего порядка имеют вид

$$\begin{aligned} 6\alpha'_{(m)} n'_{(m)} \delta g' = {} & \sigma_1\omega^3 + 3\sigma_2\omega^2 w + \\ & + 3\sigma_3\omega w^2 + \sigma_4 w^3 + 3\sigma_5\Omega^2 w + \\ & + 3\sigma_6 W^2 w + 3\sigma_7\Omega^2\omega + 3\sigma_8 W^2\omega + \\ & + 6\sigma_9\Omega\omega W + 6\sigma_{10}\Omega w W \end{aligned}, \tag{18}$$

$$\begin{aligned} 6\mathrm{A}'_{(m)} n'_{(m)} \delta G' = {} & \sigma_{11}\Omega^3 + 3\sigma_{12}\Omega^2 W + \\ & + 3\sigma_{13}\Omega W^2 + \sigma_{14} W^3 + 3\sigma_{15}\omega^2 W + \\ & + 3\sigma_{16} w^2 W + 3\sigma_{17}\omega^2\Omega + 3\sigma_{18} w^2\Omega + \\ & + 6\sigma_{19}\omega\Omega w + 6\sigma_{20}\omega W w \end{aligned}, \tag{19}$$

где $n'_{(m)}$ - показатель преломления среды пространства изображения;

$\alpha'_{(m)}$ - наклон меридионального апертурного нулевого луча после преломления на поверхности m, т.е. в пространстве изображений;

$\mathrm{A}'_{(m)}$ - наклон сагиттального апертурного нулевого луча после преломления на поверхности m, т.е. в пространстве изображений.

Каждый из коэффициентов σ_i может быть представлен в виде суммы

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{m} S_{ji} + \sum_{j=1}^{m-1} S^*_{ji}, \tag{20}$$

Коэффициент S_{ji} характеризует вклад в аберрацию, обусловленный преломлением луча на j поверхности, а коэффициент S^*_{ji} характеризует вклад в аберрацию, обусловленный прохождением луча через среду, ограниченную j-й и (j+1)-й поверхностями.

В результате анализа дифференциалов луча первого, второго и третьего порядка [8] для оптической системы, обладающей двоякой симметрией, найдены коэффициенты S_{ji} и S^*_{ji}. Для поверхности, форма которой описывается уравнением (6), а функции распределения показателей преломления разделяемых ей сред описываются выражениями (7),(8), коэффициенты S_j (индекс j опущен) имеют вид

$$\begin{aligned} S_1 = {} & 6\left((\alpha')^2 n'_0 - \alpha^2 n_0\right) C_2 h_y^2 + \\ & + 6h_y^4\left(C_2\left(n_{12}/n_0 - n'_{12}/n'_0\right)\right) + \\ & + 3C_2^2 h_y^4\left(n_z - n'_z\right) + \\ & + 24 b_3 h_y^4\left(n_0 - n'_0\right) + \\ & + 3h_y n_0\alpha^3 - 3h_y n'_0(\alpha')^3 \end{aligned}, \tag{21}$$

$$
\begin{aligned}
S_2 = {} & 3(\alpha'\beta' n'_0 - \alpha\beta n_0) C_2 h_y^2 + \\
& + 3 C_2 H_y h_y \left((\alpha')^2 n'_0 - \alpha^2 n_0 \right) + \\
& + 6 H_y h_y^3 \left(C_2 (n_{12}/n_0 - n'_{12}/n'_0) \right) + \\
& + 3 C_2^2 H_y h_y^3 (n_z - n'_z) + \\
& + 24 b_3 H_y h_y^3 (n_0 - n'_0) + \\
& + 3 h_y n_0 \beta \alpha^2 - 3 h_y n'_0 \beta' (\alpha')^2
\end{aligned} , \tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
S_3 = {} & 6(\alpha'\beta' n'_0 - \alpha\beta n_0) C_2 H_y h_y + \\
& + C_2 n'_0 \left(\beta' h_y - \alpha' H_y \right)^2 - \\
& - C_2 n_0 \left(\beta h_y - \alpha H_y \right)^2 + \\
& + 6 H_y^2 h_y^2 \left(C_2 (n_{12}/n_0 - n'_{12}/n'_0) \right) + \\
& + 3 C_2^2 H_y^2 h_y^2 (n_z - n'_z) + \\
& + 24 b_3 H_y^2 h_y^2 (n_0 - n'_0) + \\
& + 3 h_y n_0 \alpha \beta^2 - 3 h_y n'_0 \alpha' (\beta')^2
\end{aligned} , \tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
S_4 = {} & 3(\alpha'\beta' n'_0 - \alpha\beta n_0) C_2 H_y^2 + \\
& + 3 C_2 H_y h_y \left((\beta')^2 n'_0 - \beta^2 n_0 \right) + \\
& + 6 h_y H_y^3 \left(C_2 (n_{12}/n_0 - n'_{12}/n'_0) \right) + \\
& + 3 C_2^2 h_y H_y^3 (n_z - n'_z) + \\
& + 24 b_3 h_y H_y^3 (n_0 - n'_0) + \\
& + 3 h_y n_0 \beta^3 - 3 h_y n'_0 (\beta')^3
\end{aligned} , \tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
S_5 = {} & (\alpha'\beta' n'_0 - \alpha\beta n_0) C_1 h_x^2 + \\
& + C_2 H_y h_y \left((\mathrm{A}')^2 n'_0 - \mathrm{A}^2 n_0 \right) + \\
& + h_y H_y h_x^2 \left(C_2 (n_{11}/n_0 - n'_{11}/n'_0) + \right. \\
& + \left. C_1 (n_{12}/n_0 - n'_{12}/n'_0) \right) + \\
& + C_1 C_2 h_y H_y h_x^2 (n_z - n'_z) + \\
& + 4 b_2 h_y H_y h_x^2 (n_0 - n'_0) + \\
& + h_y n_0 \mathrm{A}^2 \beta - h_y n'_0 (\mathrm{A}')^2 \beta'
\end{aligned} , \tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
S_6 = {} & (\alpha'\beta' n'_0 - \alpha\beta n_0) C_1 H_x^2 + \\
& + C_2 H_y h_y \left((\mathrm{B}')^2 n'_0 - \mathrm{B}^2 n_0 \right) + \\
& + h_y H_y H_x^2 \left(C_2 (n_{11}/n_0 - n'_{11}/n'_0) + \right. \\
& + \left. C_1 (n_{12}/n_0 - n'_{12}/n'_0) \right) + \\
& + C_1 C_2 h_y H_y H_x^2 (n_z - n'_z) + \\
& + 4 b_2 h_y H_y H_x^2 (n_0 - n'_0) + \\
& + h_y n_0 \mathrm{B}^2 \beta - h_y n'_0 (\mathrm{B}')^2 \beta'
\end{aligned} , \tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
S_7 = {} & \left((\alpha')^2 n'_0 - \alpha^2 n_0 \right) C_1 h_x^2 + \\
& + C_2 h_y^2 \left((\mathrm{A}')^2 n'_0 - \mathrm{A}^2 n_0 \right) + \\
& + h_y^2 h_x^2 \left(C_2 (n_{11}/n_0 - n'_{11}/n'_0) + \right. \\
& + \left. C_1 (n_{12}/n_0 - n'_{12}/n'_0) \right) + \\
& + C_1 C_2 h_y^2 h_x^2 (n_z - n'_z) + \\
& + 4 b_2 h_y^2 h_x^2 (n_0 - n'_0) + \\
& + h_y n_0 \mathrm{A}^2 \alpha - h_y n'_0 (\mathrm{A}')^2 \alpha'
\end{aligned} , \tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
S_8 = {} & \left((\alpha')^2 n'_0 - \alpha^2 n_0 \right) C_1 H_x^2 + \\
& + C_2 h_y^2 \left((\mathrm{B}')^2 n'_0 - \mathrm{B}^2 n_0 \right) + \\
& + h_y^2 H_x^2 \left(C_2 (n_{11}/n_0 - n'_{11}/n'_0) + \right. \\
& + \left. C_1 (n_{12}/n_0 - n'_{12}/n'_0) \right) + \\
& + C_1 C_2 h_y^2 H_x^2 (n_z - n'_z) + \\
& + 4 b_2 h_y^2 H_x^2 (n_0 - n'_0) + \\
& + h_y n_0 \mathrm{B}^2 \alpha - h_y n'_0 (\mathrm{B}')^2 \alpha'
\end{aligned} , \tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
S_9 = {} & \left((\alpha')^2 n'_0 - \alpha^2 n_0 \right) C_1 H_x h_x + \\
& + C_2 h_y^2 (\mathrm{A}'\mathrm{B}' n'_0 - \mathrm{A}\mathrm{B} n_0) + \\
& + h_y^2 H_x h_x \left(C_2 (n_{11}/n_0 - n'_{11}/n'_0) + \right. \\
& + \left. C_1 (n_{12}/n_0 - n'_{12}/n'_0) \right) + \\
& + C_1 C_2 h_y^2 H_x h_x (n_z - n'_z) + \\
& 4 b_2 h_y^2 H_x h_x (n_0 - n'_0) + \\
& + h_y n_0 \mathrm{A}\mathrm{B}\alpha - h_y n'_0 \mathrm{A}'\mathrm{B}'\alpha' ,
\end{aligned} \tag{29}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{10} = {} & (\alpha'\beta' n'_0 - \alpha\beta n_0) C_1 H_x h_x + \\
& + C_2 H_y h_y (\mathrm{A}'\mathrm{B}' n'_0 - \mathrm{A}\mathrm{B} n_0) + \\
& + H_x h_x H_y h_y \left(C_2 (n_{11}/n_0 - n'_{11}/n'_0) + \right. \\
& + \left. C_1 (n_{12}/n_0 - n'_{12}/n'_0) \right) + \\
& + C_1 C_2 H_x h_x H_y h_y (n_z - n'_z) + \\
& + 4 b_2 H_x h_x H_y h_y (n_0 - n'_0) + \\
& + h_y n_0 \mathrm{A}\mathrm{B}\beta - h_y n'_0 \mathrm{A}'\mathrm{B}'\beta'
\end{aligned} \tag{30}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{11} = {} & 6\left((\mathrm{A}')^2 n'_0 - \mathrm{A}^2 n_0 \right) C_1 h_x^2 + \\
& + 6 h_x^4 \left(C_1 (n_{11}/n_0 - n'_{11}/n'_0) \right) + \\
& + 3 C_1^2 h_x^4 (n_z - n'_z) + 24 b_1 h_x^4 (n_0 - n'_0) + \\
& + 3 h_x n_0 \mathrm{A}^3 - 3 h_x n'_0 (\mathrm{A}')^3
\end{aligned} \tag{31}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{12} = {} & 3(\mathrm{A}'\mathrm{B}' n'_0 - \mathrm{A}\mathrm{B} n_0) C_1 h_x^2 + \\
& + 3 C_1 H_x h_x \left((\mathrm{A}')^2 n'_0 - \mathrm{A}^2 n_0 \right) + \\
& + 6 H_x h_x^3 \left(C_1 (n_{11}/n_0 - n'_{11}/n'_0) \right) + \\
& + 3 C_1^2 H_x h_x^3 (n_z - n'_z) + \\
& + 24 b_1 H_x h_x^3 (n_0 - n'_0) + \\
& + 3 h_x n_0 \mathrm{B} \mathrm{A}^2 - 3 h_x n'_0 \mathrm{B}' (\mathrm{A}')^2
\end{aligned} \tag{32}
$$

$$\begin{aligned}
S_{13} = {} & 6\left(A'B'n'_0 - AB\,n_0\right) C_1 H_x h_x + \\
& + C_1 n'_0 \left(B' h_x - A' H_x\right)^2 - \\
& - C_1 n_0 \left(B h_x - A H_x\right)^2 + \\
& + 6 H_x^2 h_x^2 \left(C_1\left(n_{11}/n_0 - n'_{11}/n'_0\right)\right) + \\
& + 3 C_1^2 H_x^2 h_x^2 \left(n_z - n'_z\right) + \\
& + 24 b_1 H_x^2 h_x^2 \left(n_0 - n'_0\right) + \\
& + 3 h_x n_0 A B^2 - 3 h_x n'_0 A'(B')^2
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
S_{14} = {} & 3\left(A'B'n'_0 - AB\,n_0\right) C_1 H_x^2 + \\
& + 3 C_1 H_x h_x \left((B')^2 n'_0 - B^2 n_0\right) + \\
& + 6 h_x H_x^3 \left(C_1\left(n_{11}/n_0 - n'_{11}/n'_0\right)\right) + \\
& + 3 C_1^2 h_x H_x^3 \left(n_z - n'_z\right) + \\
& + 24 b_1 h_x H_x^3 \left(n_0 - n'_0\right) + 3 h_x n_0 B^3 - \\
& - 3 h_x n'_0 (B')^3
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
S_{15} = {} & \left(A'B'n'_0 - AB\,n_0\right) C_2 h_y^2 + \\
& + C_1 H_x h_x \left((\alpha')^2 n'_0 - \alpha^2 n_0\right) + \\
& + h_x H_x h_y^2 \left(C_2\left(n_{11}/n_0 - n'_{11}/n'_0\right) + \right. \\
& \left. + C_1\left(n_{12}/n_0 - n'_{12}/n'_0\right)\right) + \\
& + C_1 C_2 h_x H_x h_y^2 \left(n_z - n'_z\right) + \\
& + 4 b_2 h_x H_x h_y^2 \left(n_0 - n'_0\right) + \\
& + h_x n_0 \alpha^2 B - h_x n'_0 (\alpha')^2 B'
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
S_{16} = {} & \left(A'B'n'_0 - AB\,n_0\right) C_2 H_y^2 + \\
& + C_1 H_x h_x \left((\beta')^2 n'_0 - \beta^2 n_0\right) + \\
& + h_x H_x H_y^2 \left(C_2\left(n_{11}/n_0 - n'_{11}/n'_0\right) + \right. \\
& \left. + C_1\left(n_{12}/n_0 - n'_{12}/n'_0\right)\right) + \\
& + C_1 C_2 h_x H_x H_y^2 \left(n_z - n'_z\right) + \\
& + 4 b_2 h_x H_x H_y^2 \left(n_0 - n'_0\right) + \\
& + h_x n_0 \beta^2 B - h_x n'_0 (\beta')^2 B'
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
S_{17} = {} & \left((A')^2 n'_0 - A^2 n_0\right) C_2 h_y^2 + \\
& + C_1 h_x^2 \left((\alpha')^2 n'_0 - \alpha^2 n_0\right) + \\
& + h_y^2 h_x^2 \left(C_2\left(n_{11}/n_0 - n'_{11}/n'_0\right) + \right. \\
& \left. + C_1\left(n_{12}/n_0 - n'_{12}/n'_0\right)\right) + \\
& + C_1 C_2 h_y^2 h_x^2 \left(n_z - n'_z\right) + \\
& + 4 b_2 h_y^2 h_x^2 \left(n_0 - n'_0\right) + \\
& + h_x n_0 \alpha^2 A - h_x n'_0 (\alpha')^2 A'
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
S_{18} = {} & \left((A')^2 n'_0 - A^2 n_0\right) C_2 H_y^2 + \\
& + C_1 h_x^2 \left((\beta')^2 n'_0 - \beta^2 n_0\right) + \\
& + h_x^2 H_y^2 \left(C_2\left(n_{11}/n_0 - n'_{11}/n'_0\right) + \right. \\
& \left. + C_1\left(n_{12}/n_0 - n'_{12}/n'_0\right)\right) + \\
& + C_1 C_2 h_x^2 H_y^2 \left(n_z - n'_z\right) + \\
& + 4 b_2 h_x^2 H_y^2 \left(n_0 - n'_0\right) + \\
& + h_x n_0 \beta^2 A - h_x n'_0 (\beta')^2 A'
\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
S_{19} = {} & \left((A')^2 n'_0 - A^2 n_0\right) C_2 H_y h_y + \\
& C_1 h_x^2 \left(\alpha'\beta' n'_0 - \alpha\beta\, n_0\right) + \\
& + h_x^2 H_y h_y \left(C_2\left(n_{11}/n_0 - n'_{11}/n'_0\right) + \right. \\
& \left. + C_1\left(n_{12}/n_0 - n'_{12}/n'_0\right)\right) + \\
& + C_1 C_2 h_x^2 H_y h_y \left(n_z - n'_z\right) + \\
& + 4 b_2 h_x^2 H_y h_y \left(n_0 - n'_0\right) + \\
& + h_x n_0 \alpha\beta A - h_x n'_0 \alpha'\beta' A'
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
S_{20} = {} & \left(A'B'n'_0 - AB\,n_0\right) C_2 H_y h_y + \\
& + C_1 H_x h_x \left(\alpha'\beta' n'_0 - \alpha\beta\, n_0\right) + \\
& + H_y h_y H_x h_x \left(C_2\left(n_{11}/n_0 - n'_{11}/n'_0\right) + \right. \\
& \left. + C_1\left(n_{12}/n_0 - n'_{12}/n'_0\right)\right) + \\
& + C_1 C_2 H_y h_y H_x h_x \left(n_z - n'_z\right) + \\
& + 4 b_2 H_y h_y H_x h_x \left(n_0 - n'_0\right) + \\
& + h_x n_0 \alpha\beta B - h_x n'_0 \alpha'\beta' B'
\end{aligned} \tag{40}$$

где h_x, H_x, h_y, H_y - высоты нулевых лучей на поверхности;

A,B,α,β - наклоны нулевых лучей перед преломлением на поверхности;

A',B',α',β' - наклоны нулевых лучей после преломления на поверхности;

$n_0 = n_0(0)$; $n_0' = n_0'(0)$;

$$n_z = \left.\frac{d(n_0(z))}{dz}\right|_{z=0}; \quad n'_z = \left.\frac{d(n'_0(z))}{dz}\right|_{z=0};$$

$n_{12} = n_{12}(0)$; $n_{12}' = n_{12}'(0)$; $n_{11} = n_{11}(0)$; $n_{11}' = n_{11}'(0)$.

Еще раз отметим, что функции, описывающие распределения показателей преломления (7)-(8), записаны в системе координат поверхности.

Для среды, распределение квадрата показателя преломления, в которой описывается функцией (1), коэффициенты S^*_i (индекс j опущен) имеют вид

$$\begin{aligned}
S_1^* = {} & 3 h_y(0) n_0(0) \alpha^3(0) - 3 h_y(d) n_0(d) \alpha^3(d) + \\
& + \int_0^d \Big(-3\left(n_0^2(z)\alpha^2(z) - n_{12}(z) h_y^2(z)\right)^2 \Big/ n_0^3(z) + \\
& + 12\, n_{23}(z) h_y^4(z) \big/ n_0(z)\Big)\, dz
\end{aligned} \tag{41}$$

$$
\begin{aligned}
S_2^* = {} & 3h_y(0)\,n_0(0)\,\beta(0)\,\alpha^2(0) - \\
& - 3h_y(d)\,n_0(d)\,\beta(d)\,\alpha^2(d) + \\
& + \int_0^d \Big(3\big(n_0^2(z)\alpha(z)\beta(z) - n_{12}(z)\,H_y(z)\,h_y(z)\big) \times \\
& \times \big(n_{12}(z)\,h_y^2(z) - n_0^2(z)\,\alpha^2(z)\big)\big/ n_0^3(z) + \\
& + 12\,n_{23}(z)\,H_y(z)\,h_y^3(z)\big/ n_0(z)\Big)dz
\end{aligned}
\tag{42}
$$

$$
\begin{aligned}
S_3^* = {} & 3h_y(0)\,n_0(0)\,\beta^2(0)\alpha(0) - \\
& - 3h_y(d)\,n_0(d)\,\beta^2(d)\alpha(d) + \\
& + \int_0^d \Big(- 3\big(n_0^2(z)\alpha(z)\beta(z) - \\
& - n_{12}(z)\,H_y(z)\,h_y(z)\big)^2 \big/ n_0^3(z) + \\
& + 12\,n_{23}(z)\,h_y^2(z)\,H_y^2(z)\big/ n_0(z) \\
& + n_{12}(z)\big(\alpha(z)\,H_y(z) - \beta(z)\,h_y(z)\big)^2 \big/ n_0^2(z)\Big)dz
\end{aligned}
\tag{43}
$$

$$
\begin{aligned}
S_4^* = {} & 3h_y(0)\,n_0(0)\,\beta^3(0) - \\
& - 3h_y(d)\,n_0(d)\,\beta^3(d) + \\
& + \int_0^d \Big(3\big(n_0^2(z)\alpha(z)\beta(z) - n_{12}(z) \times \\
& \times H_y(z)\,h_y(z)\big)\big(n_{12}(z)\,H_y^2(z) - \\
& - n_0^2(z)\,\beta^2(z)\big)\big/ n_0^3(z) + \\
& + 12\,n_{23}(z)\,h_y(z)\,H_y^3(z)\big/ n_0(z)\Big)dz
\end{aligned}
\tag{44}
$$

$$
\begin{aligned}
S_5^* = {} & h_y(0)\,n_0(0)\,\mathrm{A}^2(0)\,\beta(0) - \\
& - h_y(d)\,n_0(d)\,\mathrm{A}^2(d)\,\beta(d) + \\
& + \int_0^d \Big(\big(n_0^2(z)\alpha(z)\beta(z) - n_{12}(z) \times \\
& \times H_y(z)\,h_y(z)\big)\big(n_{11}(z)\,h_x^2(z) - \\
& - n_0^2(z)\,\mathrm{A}^2(z)\big)\big/ n_0^3(z) + \\
& + 2\,n_{22}(z)\,h_y(z)\,H_y(z)\,h_x^2(z)\big/ n_0(z)\Big)dz
\end{aligned}
\tag{45}
$$

$$
\begin{aligned}
S_6^* = {} & h_y(0)\,n_0(0)\,\mathrm{B}^2(0)\,\beta(0) - \\
& h_y(d)\,n_0(d)\,\mathrm{B}^2(d)\,\beta(d) + \\
& + \int_0^d \Big(\big(n_0^2(z)\alpha(z)\beta(z) - n_{12}(z) \times \\
& \times H_y(z)\,h_y(z)\big)\big(n_{11}(z)\,H_x^2(z) - \\
& - n_0^2(z)\,\mathrm{B}^2(z)\big)\big/ n_0^3(z) + \\
& + 2\,n_{22}(z)\,h_y(z)\,H_y(z)\,H_x^2(z)\big/ n_0(z)\Big)dz
\end{aligned}
\tag{46}
$$

$$
\begin{aligned}
S_7^* = {} & h_y(0)\,n_0(0)\,\mathrm{A}^2(0)\alpha(0) - \\
& h_y(d)\,n_0(d)\,\mathrm{A}^2(d)\alpha(d) + \\
& + \int_0^d \Big(\big(n_0^2(z)\,\alpha^2(z) - n_{12}(z) \times \\
& \times h_y^2(z)\big)\big(n_{11}(z)\,h_x^2(z) - \\
& - n_0^2(z)\,\mathrm{A}^2(z)\big)\big/ n_0^3(z) + \\
& + 2\,n_{22}(z)\,h_y^2(z)\,h_x^2(z)\big/ n_0(z)\Big)dz
\end{aligned}
\tag{47}
$$

$$
\begin{aligned}
S_8^* = {} & h_y(0)\,n_0(0)\,\mathrm{B}^2(0)\alpha(0) - \\
& - h_y(d)\,n_0(d)\,B^2(d)\alpha(d) + \\
& + \int_0^d \Big(\big(n_0^2(z)\,\alpha^2(z) - n_{12}(z)\,h_y^2(z)\big) \times \\
& \times \big(n_{11}(z)\,H_x^2(z) - n_0^2(z)\,B^2(z)\big)\big/ n_0^3(z) + \\
& + 2\,n_{22}(z)\,h_y^2(z)\,H_x^2(z)\big/ n_0(z)\Big)dz
\end{aligned}
\tag{48}
$$

$$
\begin{aligned}
S_9^* = {} & h_y(0)\,n_0(0)\mathrm{B}(0)\mathrm{A}(0)\alpha(0) - \\
& - h_y(d)\,n_0(d)\mathrm{B}(d)\mathrm{A}(d)\alpha(d) + \\
& + \int_0^d \Big(\big(n_0^2(z)\,\alpha^2(z) - n_{12}(z)\,h_y^2(z)\big) \times \\
& \times \big(n_{11}(z)\,H_x(z)\,h_x(z) - \\
& - n_0^2(z)\mathrm{B}(z)\mathrm{A}(z)\big)\big/ n_0^3(z) + \\
& + 2\,n_{22}(z)\,h_y^2(z)\,H_x(z)\,h_x(z)\big/ n_0(z)\Big)dz
\end{aligned}
\tag{49}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{10}^* = {} & h_y(0)\,n_0(0)\mathrm{B}(0)\mathrm{A}(0)\,\beta(0) - \\
& - h_y(d)\,n_0(d)\mathrm{B}(d)\mathrm{A}(d)\,\beta(d) + \\
& + \int_0^d \Big(\big(n_0^2(z)\alpha(z)\beta(z) - n_{12}(z)\,h_y(z)\,H_y(z)\big) \times \\
& \times \big(n_{11}(z)\,H_x(z)\,h_x(z) - n_0^2(z)\mathrm{B}(z)\mathrm{A}(z)\big)\big/ n_0^3(z) \\
& + 2\,n_{22}(z)\,H_x(z)\,h_x(z)\,H_y(z)\,h_y(z)\big/ n_0(z)\Big)dz
\end{aligned}
\tag{50}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{11}^* = {} & 3h_x(0)\,n_0(0)\,\mathrm{A}^3(0) - \\
& - 3h_x(d)\,n_0(d)\,\mathrm{A}^3(d) + \\
& + \int_0^d \Big(- 3\big(n_0^2(z)\,\mathrm{A}^2(z) - n_{11}(z)\,h_x^2(z)\big)^2 \big/ n_0^3(z) + \\
& + 12\,n_{21}(z)\,h_x^4(z)\big/ n_0(z)\Big)dz
\end{aligned}
\tag{51}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{12}^* = {} & 3h_x(0)\,n_0(0)\mathrm{B}(0)\,\mathrm{A}^2(0) - \\
& - 3h_x(d)\,n_0(d)\mathrm{B}(d)\,\mathrm{A}^2(d) + \\
& + \int_0^d \Big(3\big(n_0^2(z)\mathrm{A}(z)\mathrm{B}(z) - n_{11}(z)\,H_x(z)\,h_x(z)\big) \times \\
& \times \big(n_{11}(z)\,h_x^2(z) - n_0^2(z)\,\mathrm{A}^2(z)\big)\big/ n_0^3(z) + \\
& + 12\,n_{21}(z)\,H_x(z)\,h_x^3(z)\big/ n_0(z)\Big)dz
\end{aligned}
\tag{52}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{*}_{13} &= 3h_x(0)n_0(0)\mathrm{B}^2(0)\mathrm{A}(0)- \\
&- 3h_x(d)n_0(d)\mathrm{B}^2(d)\mathrm{A}(d)+ \\
&+ \int_0^d \Big(-3\big(n_0^2(z)\mathrm{A}(z)\mathrm{B}(z)- \\
&- n_{11}(z)H_x(z)h_x(z)\big)^2 \Big/ n_0^3(z)+ \\
&+ 12n_{21}(z)h_x^2(z)H_x^2(z)\big/n_0(z)+ \\
&+ n_{11}(z)\big(\alpha(z)H_y(z)-\beta(z)h_y(z)\big)^2 \Big/ n_0^2(z)\Big)dz
\end{aligned} \tag{53}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{*}_{14} &= 3h_x(0)n_0(0)\mathrm{B}^3(0)-3h_x(d)n_0(d)\mathrm{B}^3(d)+ \\
&+ \int_0^d \Big(3\big(n_0^2(z)\mathrm{A}(z)\mathrm{B}(z)-n_{11}(z)H_x(z)h_x(z)\big)\times \\
&\times \big(n_{11}(z)H_x^2(z)-n_0^2(z)\mathrm{B}^2(z)\big)\Big/ n_0^3(z)+ \\
&+ 12n_{21}(z)h_x(z)H_x^3(z)\big/n_0(z)\Big)dz
\end{aligned} \tag{54}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{*}_{15} &= h_x(0)n_0(0)\alpha^2(0)\mathrm{B}(0)- \\
&- h_x(d)n_0(d)\alpha^2(d)\mathrm{B}(d)+ \\
&+ \int_0^d \Big(\big(n_0^2(z)\mathrm{A}(z)\mathrm{B}(z)-n_{11}(z)H_x(z)h_x(z)\big)\times \\
&\times \big(n_{12}(z)h_y^2(z)-n_0^2(z)\alpha^2(z)\big)\Big/ n_0^3(z)+ \\
&+ 2n_{22}(z)h_x(z)H_x(z)h_y^2(z)\big/n_0(z)\Big)dz
\end{aligned} \tag{55}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{*}_{16} &= h_x(0)n_0(0)\beta^2(0)\mathrm{B}(0)- \\
&- h_x(d)n_0(d)\beta^2(d)\mathrm{B}(d)+ \\
&+ \int_0^d \Big(\big(n_0^2(z)\mathrm{A}(z)\mathrm{B}(z)-n_{11}(z)H_x(z)h_x(z)\big)\times \\
&\times \big(n_{12}(z)H_y^2(z)-n_0^2(z)\beta^2(z)\big)\Big/ n_0^3(z)+ \\
&+ 2n_{22}(z)h_x(z)H_x(z)H_y^2(z)\big/n_0(z)\Big)\,dz
\end{aligned} \tag{56}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{*}_{17} &= h_x(0)n_0(0)\alpha^2(0)\mathrm{A}(0)- \\
& h_x(d)n_0(d)\alpha^2(d)\mathrm{A}(d)+ \\
&+ \int_0^d \Big(\big(n_0^2(z)\mathrm{A}^2(z)-n_{11}(z)h_x^2(z)\big)\times \\
&\times \big(n_{12}(z)h_y^2(z)-n_0^2(z)\alpha^2(z)\big)\Big/ n_0^3(z)+ \\
&+ 2n_{22}(z)h_x^2(z)h_y^2(z)\big/n_0(z)\Big)\,dz
\end{aligned} \tag{57}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{*}_{18} &= h_x(0)n_0(0)\beta^2(0)\mathrm{A}(0)- \\
&- h_x(d)n_0(d)\beta^2(d)\mathrm{A}(d)+ \\
&+ \int_0^d \Big(\big(n_0^2(z)\mathrm{A}^2(z)-n_{11}(z)h_x^2(z)\big)\times \\
&\times \big(n_{12}(z)H_y^2(z)-n_0^2(z)\beta^2(z)\big)\Big/ n_0^3(z)+ \\
&+ 2n_{22}(z)h_x^2(z)H_y^2(z)\big/n_0(z)\Big)\,dz
\end{aligned} \tag{58}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{*}_{19} &= h_x(0)n_0(0)\beta(0)\alpha(0)\mathrm{A}(0)- \\
&- h_x(d)n_0(d)\beta(d)\alpha(d)\mathrm{A}(d)+ \\
&+ \int_0^d \Big(\big(n_0^2(z)\mathrm{A}^2(z)-n_{11}(z)h_x^2(z)\big)\times \\
&\times \big(n_{12}(z)H_y(z)h_y(z)- \\
&- n_0^2(z)\alpha(z)\beta(z)\big)\Big/ n_0^3(z)+ \\
&+ 2n_{22}(z)h_x^2(z)H_y(z)h_y(z)\big/n_0(z)\Big)\,dz
\end{aligned} \tag{59}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{*}_{20} &= h_x(0)n_0(0)\beta(0)\alpha(0)\mathrm{B}(0)- \\
&- h_x(d)n_0(d)\beta(d)\alpha(d)\mathrm{B}(d)+ \\
&+ \int_0^d \Big(\big(n_0^2(z)\mathrm{A}(z)\mathrm{B}(z)-n_{11}(z)h_x(z)H_x(z)\big)\times \\
&\times \big(n_{12}(z)H_y(z)h_y(z)-n_0^2(z)\beta(z)\alpha(z)\big)\Big/ n_0^3(z)+ \\
&+ 2n_{22}(z)H_x(z)h_x(z)H_y(z)h_y(z)\big/n_0(z)\Big)dz
\end{aligned} \tag{60}
$$

где d - расстояние между вершинами поверхностей, ограничивающих градиентную среду.

Система координат, в которой описывается распределение квадрата показателя преломления (1), совмещена с системой координат поверхности, ограничивающей градиентную среду слева (по ходу луча).

Для оптических систем двоякой симметрии, не содержащих градиентных элементов, полученные в данной статье коэффициенты σ_1 ...σ_{20} совпадают с аналогичными коэффициентами, приведенными в работах [1],[5].

Литература.

1. Слюсарев Г. Г. Методы расчета оптических систем. Л.: Машиностроение, 1969.- 670с.
2. Заказнов Н.П., Кирюшин С.И. Кузичев В.И. Теория оптических систем. - М.: Машиностроение, 1992.-448с.
3. Русинов М.М. Композиция оптических систем. - Л.: Машиностроение, 1989.-383с.
4. А.с. N 1786461 СССР, МКИ G02 B 13/08. Анаморфотная цилиндрическая система с осевым градиентом/ Казаков В.И., Немцева Г.Е. - 5с.:ил.
5. C. Chen, L.He The calculation of primary aberration of a torus // Optik.-1991.-b.87, No3 (1991). -s.115-117.
6. Грейсух Г.И., Ефименко И. М., Степанов С. А. Оптика градиентных и дифракционных элементов. М.: Радио и связь ,1990.-136с.
7. Sands P.J. Third-order aberrations of inhomogeneous lenses // J. Opt.Soc. Am.-1970.-Vol.60, No 11.-P.1436-1443.
8. Ильинский Р.Е., Ровенская Т.С. Дифференциалы луча в оптической системе // Вестник МГТУ. Сер.: Приборостроение.-1995.-N3. -с.100-108.